Université Paris 1 Panthéon–Sorbonne
UFR 02 Sciences Economiques

Master Economie Théorique et Empirique

Master 2 Recherche - Spécialité Macroéconomie

Soutenabilité de la dette publique et fonctions de réaction budgétaire en Europe

Présenté et soutenu par
Pierre Aldama

Directeur de soutenance
Hubert Kempf

Juin 2013

L'Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne n'entend donner aucune approbation, ni désapprobation aux opinions émises dans ce mémoire ; elles doivent être considérées comme propres à leur auteur.

Résumé

Ce mémoire [1] est consacré à l'analyse de la soutenabilité de la dette publique à partir d'une fonction de réaction budgétaire *ad hoc*, proposée par Stefan Collignon (Collignon, 2012) pour décrire le cadre du *Stability and Growth Pact*. Cette fonction de réaction relie, sous la forme d'un modèle à correction d'erreur (ECM), la variation du solde public primaire aux écarts du déficit total et de la dette publique par rapport à des cibles respectives de déficit et de dette publique.

Dans ce cadre, la soutenabilité de la dette publique est analysée comme les conditions de stabilité et de convergence d'un système d'équations différentielles comprenant une équation comptable qui représente la contrainte budgétaire de l'État et une équation comportementale, décrivant la réponse budgétaire à un éloignement des cibles de déficit et de dette publique. La dette est dite "soutenable" s'il existe des conditions sur les paramètres de cette fonction de réaction tels que le système est stable et si ces conditions sont satisfaites.

Nous proposons de reprendre ce modèle simple, à deux équations, de ré-estimer la fonction de réaction budgétaire pour un échantillon de pays de l'UE et de la Zone euro, puis de substituer au taux d'intérêt de long-terme, jusqu'alors considéré comme exogène, une fonction modélisant la prime de risque liée à l'endettement public, pour tenir compte de son effet sur les conditions de stabilité. Nous estimons ensuite cette relation de prime de risque afin de produire des tests alternatifs à ceux initialement proposés par Collignon. Les résultats obtenus sont peu concluants, mais nous proposons tout de même d'en déduire des tests de soutenabilité, à titre méthodologique et indicatif.

Enfin, dans une dernière partie théorique, une extension de ce modèle à trois équations est également présentée, où cette fois-ci le taux d'intérêt réel de long terme est directement endogénéisé, par l'introduction d'une troisième fonction de réaction censée représenter la réaction des marchés financiers à l'endettement public.

1. Je tiens à remercier tout d'abord Hubert Kempf pour son assistance et ses conseils tout au long de la préparation de ce mémoire. Merci également à Jean-Olivier Hairault, Florin Bilbiie pour leurs commentaires à l'occasion du séminaire de macroéconomie du M2 ETE.

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Revue de littérature **7**

3 Une critique du modèle proposé par Collignon **10**
3.1 Modèle théorique 10
3.1.1 Présentation du modèle initial 10
3.1.2 Angles morts : variables exogènes et absence de modélisation de la prime de risque 14
3.1.3 Critères de soutenabilité : une erreur dans l'article de Collignon 15
3.2 Estimation et tests de soutenabilité 17
3.2.1 Le risque de régression fallacieuse en présence de régresseurs non stationnaires 17
3.2.2 Critères de soutenabilité et tests de Student 19

4 Essai de modélisation de l'effet d'une prime de risque **24**
4.1 Soutenabilité de la dette publique en présence d'une prime de risque 24
4.1.1 Introduction de la prime de risque et analyse de l'état stable du système . . 24
4.1.2 Linéarisation du système, condition pour un point-fixe hyperbolique 26
4.1.3 Étude des conditions de stabilité et critères de soutenabilité de la dette publique 27
4.2 Estimation et tests empiriques 29
4.2.1 Stratégie d'estimation 29
4.2.2 Estimation d'une équation de prime de risque 30
4.2.3 Tests de soutenabilité en présence d'une prime de risque 32

5 Extension. Soutenabilité de la dette publique, règles budgétaires et dynamique des taux d'intérêt **35**
5.1 Forme générale du modèle, linéarisation et conditions de stabilité. 35
5.1.1 Forme générale. 35
5.1.2 Linéarisation. 36
5.1.3 Conditions de stabilité. 36
5.2 Exemples de spécification pour la fonction de dynamique des taux d'intérêts 37
5.2.1 Modèle 1 : réponse au niveau du ratio d'endettement public 37
5.2.2 Modèle 2 : réponse au niveau de déficit public 39
5.3 Discussion 41
5.3.1 A propos de la spécification des fonctions de réactions des marchés financiers. 41
5.3.2 Stabilité de la dynamique des taux d'intérêt et soutenabilité de la dette publique 41

6 Conclusions **42**

A Preuve des propositions théoriques **45**
A.1 Preuve des propositions relatives aux sections 3 et 4 45
A.2 Preuve des propositions relatives à la section 5 47
A.2.1 Critères de stabilité pour une matrice carrée d'ordre 3 47
A.2.2 Preuves des propositions relatives au modèle 1 47
A.2.3 Preuves des propositions relatives au modèle 2 48

B Données **49**

C Construction des tests de soutenabilité **50**

Bibliographie **51**

Liste des tableaux

1 Résultats d'estimation pour l'équation (7) 20
2 Résultats d'estimation pour l'équation (8) 21
3 Synthèse des résultats d'estimation et des seuils de soutenabilité moyens 22
4 Résultats des tests de soutenabilité : tests de Student unilatéraux 22
5 Résultats d'estimation pour les équations de prime de risque (14) et (15) 31
6 Seuils de soutenabilité en présence de prime de risque 33
7 Tests de soutenabilité en présence d'une prime de risque 34

Table des figures

1 Dette publique et contrefactuel d'après Collignon (2012) 12
2 Dette publique aux États-Unis, 1792-2003 13

1 Introduction

La question de la soutenabilité de la dette publique dans les pays européens fait les gros titres de la presse européenne et internationale. Depuis 2008 en effet, le niveau de la dette publique s'est considérablement élevé, pour de multiples raisons. D'abord à cause de la forte dégradation des soldes publics essentiellement attribuable aux plans de relance budgétaires et de refinancement du secteur bancaire. Mais également compte–tenu de l'alourdissement du service de la dette publique, dans un contexte de faible croissance et d'accroissement des taux d'intérêts réels dans les pays connaissant une augmentation de la prime de risque sur les obligations publiques. Dès lors, on a pu parler de crise des dettes souveraines européennes. Une crise qui a touché inégalement – il faut le souligner – les pays membres de l'UE et de la Zone euro. Ainsi, si l'Allemagne, l'ensemble des pays du nord de l'Europe, mais également la France, connaissent des taux d'intérêt réel historiquement faibles sur leurs obligations publiques à 10 ans, les pays du "sud" – la Grèce, l'Espagne, le Portgual, l'Italie mais aussi l'Irlande – ont vu leur charge de la dette exploser : ainsi, à titre d'exemple, le taux d'intérêt réel à long terme grec s'est élevé à 23.5% en 2013, d'après les données de la Commission européenne.

Beaucoup attribuent cette situation, sans aucune hésitation, à une crise des finances publiques, les pays touchés ayant mené des politiques budgétaires laxistes et irresponsables, depuis vingt voire trente ans. S'il est vrai que nombre de ces pays n'ont pas connu d'excédents budgétaires depuis la fin des années 1970, s'il est également vrai que leur dette publique n'a cessé de croître depuis, faut-il pourtant en déduire à la fois qu'ils ont mené une politique budgétaire non soutenable et que cette crise n'est que la "juste" conséquence du biais dépensier de leurs gouvernements successifs ? Il est d'ailleurs remarquable de voir à quel point le débat économique et le langage diplomatique comme le langage journalistique n'a eu cesse de traiter cette crise d'un point de vue moral, justifiant du même coup des politiques drastiques de consolidation budgétaire, au plus fort de ce qui est très certainement la plus forte récession qu'ait connu l'Europe depuis les années 1930.

Pourtant, aucun article ou document de travail n'apporte de réponse catégorique à cette question. Afonso (2005) estime par exemple que les dettes européennes ont été, ces vingt à trente dernières années, faiblement soutenables ; mais l'article de Stefan Collignon (2012) tend plutôt à affirmer qu'elles l'étaient, au moins jusqu'en 2008. Notons d'ailleurs qu'il s'agit ici de ne traiter que la question de la soutenabilité des déficits et de la dette publique, et non pas de celle des déficits de la balance courante, ou de la position extérieure nette : une politique budgétaire pourrait tout à fait être soutenable sans pour autant que le soient les déficits du compte courant ; il s'agit de bien distinguer, d'un point de vue théorique, ce qui relève d'une crise de la balance des paiements, et ce qui relève de l'insoutenabilité de la politique budgétaire. Ce travail vise, en premier lieu, à faire la synthèse des différents concepts qui ont été définis pour juger de la soutenabilité de la dette publique. Comme nous le verrons, une rapide revue de la littérature existante montre que la définition des critères pratiques permettant de juger de la soutenabilité d'une politique budgétaire fait débat parmi les économistes : en effet, si le concept de contrainte budgétaire intertemporelle est acquis, c'est son application à la réalité macroéconomique, dans des tests de soutenabilité, qui est discutée ici.

Parmi l'ensemble des programmes de recherche consacrés à la soutenabilité de la dette publique, dont nous proposons une courte présentation à la section 2, notre mémoire propose d'explorer un programme de recherche relativement récent, puisqu'il prend véritablement forme avec un article publié à la fin des années 1990 par un chercheur central dans le domaine, Henning Bohn (1998). H. Bohn propose, concrètement, de tester la soutenabilité d'une politique budgétaire, sur une période relativement longue, par l'estimation d'une fonction de réaction budgétaire, qui relie

le solde primaire budgétaire (déficit public hors intérêts de la dette) au niveau de dette publique. Si ce solde primaire est significativement et positivement relié à l'endettement public alors la dette publique est soutenable, conclut Bohn. Plus récemment, un article publié dans l'*International Economic Review* par Stefan Collignon (2012) propose d'appliquer cette méthode à partir d'une fonction de réaction budgétaire *ad hoc* directement inspirée du cadre institutionnel européen, c'est-à-dire le *Stability and Growth Pact* et l'*Excessive Deficit Procedure*, en supposant que le "contexte économique" (taux d'intérêt réel, croissance économique et inflation) est exogène et indépendant de la politique budgétaire.

Ce memoire propose tout d'abord, à la section 3, de reprendre l'article de S. Colligon, à la fois pour présenter le cadre dans lequel nous nous plaçons, mais également pour apporter une correction à une des propositions théoriques de l'article et enfin pour apporter une critique économétrique à la stratégie d'estimation de la fonction de réaction budgétaire retenue par Collignon ainsi qu'à la présentation de ces "tests" de soutenabilité.

Ensuite, à la section 4, nous proposons d'apporter une modification au modèle initial pour tenir compte de ce qu'on appelle couramment le risque souverain : nous introduisons alors une équation linéaire censée représenter la prime de risque liée à l'endettement public. L'introduction de cette prime permet alors de substituer au taux d'intérêt une équation qui est fonction de la dette publique, à partir de quoi nous définissons des seuils de soutenabilité alternatifs. Nous proposons également d'estimer cette équation de prime de risque. Mais cependant, les résultats obtenus nous paraissent peu robustes, et nécessiteraient certainement d'être repris dans de futurs travaux s'y consacrant entièrement. Toutefois, nous faisons le choix de présenter à titre indicatif et méthodologique des résultats pour les tests de soutenabilité en présence de prime de risque.

La section 5 présente, quant à elle, une extension de cette méthodologie : nous proposons en effet d'endogénéiser directement le taux d'intérêt réel des obligations publiques en introduisant une fonction de réaction des marchés financiers modélisant l'effet du risque souverain sur la soutenabilité de la dette publique. Nous en déduisons de nouveaux critères de soutenabilité pour la politique budgétaire, mais également des critères permettant peut-être de distinguer ce qui relève plutôt d'une crise de confiance des investisseurs sur les marchés obligataires (que l'on qualifierait "d'instabilité financière" [2]) et ce qui relève au contraire de la stricte soutenabilité ou insoutenabilité de la politique budgétaire.

2. Cette interprétation n'a évidemment rien à voir avec l'instabilité financière dont il est question à propos du risque bancaire systémique et de la politique macroprudentielle.

2 Revue de littérature

La soutenabilité de la dette publique ou des déficits publics se définit de façon standard comme une politique budgétaire satisfaisant la contrainte budgétaire intertemporelle du gouvernement (IBC, *intertemporal budget constraint*) du gouvernement. Cette contrainte budgétaire énonce une idée simple : compte–tenu du niveau initial de dette publique à une date t donnée, une politique budgétaire n'est soutenable qu'à la condition que le niveau de dette publique initial (exprimé en valeur absolue ou bien rapporté au produit intérieur brut comme c'est plus souvent le cas) soit entièrement compensé par la somme des futurs surplus budgétaires primaires, actualisés au taux d'intérêt payé sur la dette publique – auquel on retranche le taux de croissance économique, si l'on considère le ratio de dette publique plutôt que sa valeur absolue. Autrement dit, énoncé simplement, cette condition stipule qu'un gouvernement qui s'endette, doit *tôt ou tard* dégager des excédents budgétaires de façon à rembourser ses dettes.

Cette condition est exprimée de façon équivalente mais moins intuitive par la condition de transversalité sur la dette publique : cette condition mathématique implique que la valeur actualisée de la dette publique future tend à être négative ou nulle pour un horizon infini. Cette condition est généralement interprétée comme la condition de *no Ponzi game*, c'est-à-dire l'impossibilité pour un gouvernement de financer sa dette initiale par des dettes futures, à la manière des montages pyramidaux des escrocs financiers Charles Ponzi ou Bernard Madoff. Cependant, il faut noter que cette analyse de l'IBC suppose un contexte d'efficience dynamique (des taux d'intérêts réels supérieurs au taux de croissance réel du produit intérieur brut). Comme le note Collignon (2012), dans le cas d'inefficience dynamique, cette analyse conclut à la possibilité pour un gouvernement de suivre un jeu de Ponzi ; cependant, en pratique, un contexte d'inefficience dynamique permet aux administrations publiques de se désendetter rapidement et sans avoir à accroître leur effort budgétaire, comme cela fut le cas pour les Etats-Unis ou la France après les records d'endettement public dus à la Seconde Guerre mondiale.

Une première proposition de test de la soutenabilité budgétaire est directement inspirée de cette analyse de la contrainte budgétaire intertemporelle. Elle a été proposée par Blanchard et al. (1991) et a été récemment utilisée, entre autres, par Bénassy-Quéré and Roussellet (2012). Cette méthode propose de calculer le taux de prélèvement obligatoire au-dessus duquel la politique budgétaire vérifie l'IBC, c'est-à-dire le taux d'imposition global tel que les futurs excédents budgétaires permettent de financer les dettes initiales. Cela étant ce concept de soutenabilité peut impliquer, entre autres, que la dette publique doive revenir à son niveau initial pour être soutenable : ici Blanchard et al. nuancent leur propos et remarquent que rien ne permet de dire d'une politique budgétaire qui se propose de stabiliser la dette publique à 40% du PIB contre un niveau initial de 20%, qu'elle est insoutenable puisque l'IBC est quand même vérifiée dans ce cas-là. Un problème survient lorsque le taux de prélèvement obligatoires, bien que "très elevé", reste inférieur au taux critique : alors se posent les questions de monétisation de la dette publique et d'inflation, ou encore du risque de défaut, compte–tenu de "l'impossibilité" d'augmenter encore le taux de prélèvements obligatoires macroéconomique. Finalement, les auteurs avancent l'idée, reprise plus tard par les rédacteurs du *Stability and Growth Pact*, qu'une politique budgétaire caractérisée par une cible de dette publique peut tout à fait être soutenable, quand bien même cette cible serait plus élevée que le niveau d'endettement initial ; ils précisent même qu'un ratio de dette publique qui s'accroitrait à un taux inférieur au taux d'intérêt ajusté du taux de croissance économique vérifierait la contrainte budgétaire intertemporelle.

Mais ce sont les économètres qui se sont le plus intéressés à la question de la soutenabilité budgétaire. Cet intérêt se nourrit de la littérature qui s'est développée en économétrie des séries

temporelles sur les questions de racines unitaires, de non-stationnarité et de cointégration. Un premier article essentiel sur la question est celui de Hamilton and Flavin (1986) qui pose tout simplement qu'une série temporelle de dette publique vérifiant les propriétés de stationnarité, ou autrement dit qui est $I(0)$ (intégrée d'ordre zéro), est une condition suffisante pour garantir la soutenabilité de la dette publique. Trehan and Walsh (1988) montrent qu'une série stationnaire pour le déficit (intérêts de la dette compris), qui équivaut à une série de dette publique $I(1)$ c'est-à-dire stationnaire en différence, est une condition suffisante pour l'IBC. Enfin, Quintos (1995) montre qu'une série de dette publique $I(2)$ (*i.e.* une série de déficit public $I(1)$, stationnaire en différence) vérifie la contrainte budgétaire intertemporelle du gouvernement. Quintos qualifie alors le cas d'une dette $I(1)$ de "fortement soutenable", et le cas d'une dette $I(2)$ de "faiblement soutenable". Dans la mesure où les séries de dette publique apparaissent être nettement non stationnaires, du moins pour la période récente, les économètres ont alors proposé de tester la cointégration des séries de dépenses et de recettes publiques (INSEE, 2004; Afonso, 2005).

Pour tester la cointégration des séries de dépenses et de recettes publiques, les économètres mettent en œuvre la méthode en deux étapes de Engle-Granger. Soient G_t et T_t les séries de dépenses et de recettes publiques, toutes deux non stationnaires. On estime le modèle suivant par MCO :

$$G_t = \beta T_t + \varepsilon_t$$

Si les séries de dépenses et de recettes publiques sont cointégrées, alors il existe un vecteur de cointégration défini par le paramètre β tel que :

$$G_t - \beta T_t = \varepsilon_t \sim I(0)$$

Il suffit alors de mener un test ADF sur les résidus obtenus à la première régression ; pour ce faire on estime un processus (par exemple) $AR(1)$, sur ces résidus :

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

Et on effectue un test (spécifique à la méthode de Dickey-Fuller) sur la valeur du paramètre ρ pour déterminer s'il est significativement inférieur à 1.

Une fois ces tests de cointégration effectués, si les séries dépenses–recettes ne sont pas cointégrées, alors la dette publique est *non soutenable*. Dans le cas de séries dépenses–recettes cointégrées, on s'intéresse alors à la valeur du paramètre de cointégration β :

- si $\beta = 1$ la dette publique est fortement soutenable avec un ratio stationnaire ;
- si $\beta \in]0; 1[$ alors la dette publique est faiblement soutenable avec un ratio non stationnaire, qui appelle une inflexion du niveau des dépenses ou un relèvement du taux de prélèvements obligatoires à moyen terme.

La simplicité et l'efficacité de ces techniques ont été les clés de leur succès ; ces techniques de tests de contraintes budgétaires intertemporelles ont été massivement utilisées pour des sujets similaires tel que que la soutenabilité des déficits courants. C'est à partir de ces techniques qu' Afonso (2005) conclut que la plupart des dettes publiques européennes sont faiblement soutenables. Cependant, on remarquera que la procédure qu'il met en œuvre l'amène à ne pas tester la cointégration des series dépenses–recettes dans le cas où la dette publique n'est pas $I(1)$ mais $I(2)$, ce qui est contestable. D'autre part, une critique que nous faisons de cette méthodologie est celle de la pertinence de tels tests sur des séries temporelles couvrant des durées inférieures à 20 ans ; certes, certains macroéconomètres considèrent que le seuil minimal pour effectuer un test de cointégration

est de 10 années d'observations, mais pour reprendre une expression de Hakkio and Rush (1991) : *how short is the long-run ?*

Cependant, un programme de recherche a été lancé, d'une certaine manière en réaction à la "routinisation" de ces batteries de tests (stationnarité, cointégration), afin de revenir à une procédure ayant un peu plus de sens macroéconomique. Le premier article véritablement novateur est celui de Bohn (1998), dans lequel l'auteur estime une fonction de réaction budgétaire, sur longue période pour les Etats-Unis et affirme qu'une réponse significativement positive du solde budgétaire primaire au niveau de dette publique est une preuve suffisante de la soutenabilité de la dette publique. Plus tard, dans un document de travail du CESifo Group Munich (Bohn, 2005), publié au chapitre 2 de l'ouvrage de Neck and Sturm (2008) , il reproduit ce travail avec des données sur très longue période, 1792-2003, pour les Etat-Unis et dresse le même constat, à savoir que la dette publique américaine est largement soutenable. Dans son article de 2005, il avance l'idée que le fait de ne pas rejeter l'hypothèse de racine unitaire pour une série temporelle n'est pas la preuve que ce cette série est non-stationnaire (Bohn, 2005) (non ajoutons : d'autant plus à partir d'échantillons assez restreints, ce qui n'est pas le cas de son travail de 2005). Ce qui, d'ailleurs, fait sens dans la mesure où l'histoire de la dette publique se résume en quelques rares épisodes de très fort accroissement de la dette publique, suivies par de longue période de désendettement, de telle sorte qu'il faudrait pouvoir tester la stationarité de la dette publique sur une très longue période pour pouvoir tenir compte de ces cycles longs. Enfin, Bohn (2007) montre enfin formellement que la condition de stationarité de la série de dette publique n'est pas une condition nécessaire pour satisfaire la condition de transversalité ou la contrainte budgétaire intertemporelle. En effet, il montre que l'IBC ou la TC sont vérifiées pour une série intégrée d'ordre n, y compris pour n arbitrairement très élevé. Dans le même article, il montre que l'usage d'une fonction de réaction budgétaire de la forme :

$$\text{Deficit}_t = -\alpha \text{Dette}_t$$

revient tout simplement à affirmer que les séries de déficit et de dette publique doivent être cointégrées, avec un coefficient α. Cependant, l'étude de telles fonctions de réactions permet de revenir, selon lui, à la théorie économique, puisqu'il s'agit de ne plus seulement se contenter de reproduire une méthodologie économétrique routinière, mais de s'intéresser au comportement budgétaire des gouvernements...

Enfin, un article de Collignon (2012) propose d'aller un peu plus loin dans l'étude de la soutenabilité de la dette publique. En proposant une d'étudier un système de deux équations différentielles, comprenant une équation d'accumulation de la dette publique, représentant la contrainte budgétaire intertemporelle du gouvernement, et une fonction de réaction budgétaire *ad hoc*, justifiée d'après le cadre institutionnel du *Stability and Growth Pact* et de l'*Excessive Deficit Procedure*, Collignon propose d'étudier un modèle très simple, une forme excessivement réduite d'un modèle macroéconomique, d'après lequel on puisse définir une trajectoire de dette publique qui soit soutenable (c'est-à-dire non explosive). Et dans le cadre de ce modèle, la soutenabilité devrait s'interpréter comme les conditions sur les paramètres de la fonction de réaction budgétaire pour lesquelles le système de deux équations différentielles converge vers son état stable.

C'est cette piste que nous proposons maintenant d'explorer pour notre mémoire.

3 Une critique du modèle proposé par Collignon

L'idée initiale proposée par Stefan Collignon (2012) ne manque pas d'intérêt, dans la mesure où elle prend acte du fait que la dette publique est rarement stationnaire. Cependant, là où cela justifiait de recourir aux tests de cointégration sur les séries de dépenses et de recettes publiques pour étudier la soutenabilité de la dette publique, Collignon propose un modèle dynamique simple qui est censé "générer" un contrefactuel, c'est-à-dire une série temporelle de dette publique *soutenable* qui ne soit pas nécessairement stationnaire ; la soutenabilité de la dette publique à proprement parler s'analyse ensuite comme les conditions de stabilité et de convergence de ce système dynamique [3]. L'auteur exprime cet objectif de la façon suivante :

> "I suggest modelling the process that generates sustainable data, and then check if the data are consistent with this model." (Collignon, 2012, p.540)

Nous proposons donc d'évaluer de manière critique le modèle de Collignon. Il s'agit de reprendre sa construction, d'expliciter ses hypothèses et d'en évaluer la portée, de vérifier les démonstrations des propositions théoriques. Nous souhaitons également revenir sur la stratégie d'estimation mise en œuvre, sur la présentation des résultats et leur interprétation. Ainsi, nous consacrerons une première partie à la critique théorique du modèle dynamique ; puis nous en viendrons aux questions empiriques, relatives aux estimations proposées dans l'article initial.

3.1 Modèle théorique

D'une part, ce modèle laisse de côté un grand nombre de questions essentielles à la problématique de la soutenabilité de la dette publique, en considérant des variables d'intérêt, telles que le taux de croissance du PIB, le taux d'inflation ou encore le taux d'intérêt réel de long-terme (*i.e.* le taux d'intérêt des obligations publiques à 10 ans) comme exogènes à la dynamique de la dette publique et à la variation du solde public primaire.

D'autre part, après avoir ré-effectué les démonstrations des conditions de stabilité proposées par Collignon, il nous est apparu qu'il y avait probablement une erreur, concernant le critère de soutenabilité dans le cas d'une fonction de réaction budgétaire uniquement définie par une cible de dette publique. Nous proposons de corriger cette erreur et d'en fournir une explication économique : il apparait notamment que la soutenabilité de la dette publique ne peut être garantie par une règle de politique budgétaire (*i.e.* une fonction de réaction budgétaire) uniquement fondée sur une cible de dette publique, dans le cas où l'on considère la variation du surplus budgétaire primaire comme "*policy variable*".

3.1.1 Présentation du modèle initial

Le modèle initial proposé par Collignon se compose de trois équations [4]. Deux de ces équations sont purement comptables : la première est celle de l'accumulation de la dette publique d_t :

$$\Delta d_t = (r_t - y_t)d_{t-1} - s_t \tag{1}$$

où r_t est le taux d'intérêt réel de long-terme, y_t est le taux de croissance du PIB, s_t est le solde public primaire et Δ est l'opérateur différence-première tel que $\Delta d_t = d_t - d_{t-1}$. La seconde est

3. Il faut bien noter que, pour parvenir à générer une série temporelle *non stationnaire* de dette publique *soutenable*, Stefan Collignon doit considérer certaines variables macroéconomiques comme exogènes, et non des moindres...

4. Sauf exception, toutes les variables introduites par la suite sont rapportées au produit intérieur brut Y_t tel que $x_t = X_t/Y_t$

l'équation comptable qui relie le déficit public total def_t (intérêts sur la dette compris) à la dette publique d_t et au solde public primaire s_t :

$$\begin{aligned} def_t &= d_t - (1 - y_t - \pi_t)d_{t-1} \\ &= \Delta d_t + (y_t + \pi_t)d_{t-1} \\ &= (r_t - y_t)d_{t-1} + (y_t + \pi_t)d_{t-1} - s_t \end{aligned}$$

d'où vient la relation suivante :

$$def_t = (r_t + \pi_t)d_{t-1} - s_t \tag{2}$$

où π_t est le taux d'inflation.

Jusqu'ici, Collignon ne fait qu'introduire des équations comptables qui représentent la contrainte budgétaire instantanée de l'État. L'étape suivante est l'introduction de la fonction de réaction budgétaire. Celle-ci est construite de façon *ad hoc* pour représenter la politique budgétaire dans le cadre institutionnel du *Stability and Growth Pact* et de l'*Excessive Deficit Procedure*. Le SGP définit un ratio maximum de déficit public de 3% et un ratio maximum de dette publique de 60% ; le dépassement de ces ratios impliquent le déclenchement de l'EDP qui stipule qu'un État membre de l'Union Monétaire Européenne doit apporter une réponse budgétaire (c'est-à-dire une variation du solde public primaire) aux écarts du déficit public et de la dette publique par rapport à leurs ratios maximums respectifs, de manière "à mettre fin à cette situation à échéance donnée (*i.e.* fixée par la Commission Européenne)" [5] dans l'année suivant l'identification d'une procédure de déficit excessif.

Collignon propose alors de définir la fonction de réaction budgétaire de la façon suivante :

$$\Delta s_t = \alpha(def_{t-1} - z_1) + \beta(d_{t-1} - z_2) \tag{3}$$

où α et β sont les coefficients qui déterminent la vitesse d'ajustement. Ils représentent la proportion avec laquelle un gouvernement compense un écart du déficit et de la dette à leurs valeurs-cibles respectives, z_1 et z_2. Notons ici qu'il n'est pas supposé que ces cibles soient nécessairement égales aux ratios maximum définis dans le cadre du SGP ; il s'agit au contraire de cibles propres à la politique budgétaire de chaque pays membre, c'est-à-dire des paramètres structurels que l'auteur propose de déduire de ses résultats d'estimation.

Ces trois équations définies, l'auteur propose de se réduire à deux équations, en substituant dans l'équation (3) la variable de déficit def_t par son expression comptable, d'après l'équation (2). La fonction de réaction (3) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\Delta s_t = \alpha(r_{t-1} + \pi_{t-1})d_{t-2} + \beta d_{t-1} - \alpha s_{t-1} - z \tag{4}$$

où $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ condense les coefficients de réaction et les valeurs-cibles de déficit et de dette.

On obtient ainsi un système à deux équations et deux variables endogènes, d_t et s_t tel que :

$$\begin{aligned} \Delta d_t &= (r_t - y_t)d_{t-1} - s_t \\ \Delta s_t &= \alpha(r_{t-1} + \pi_{t-1})d_{t-2} + \beta d_{t-1} - \alpha s_{t-1} - z \end{aligned}$$

Probablement pour des raisons de simplicité dans l'étude de ce système dynamique, Collignon transforme ce modèle en l'écrivant en temps continu : en effet, la présence de la variable de dette à la période $t-2$ rend moins immédiate l'étude du système sous la forme $X_t = AX_{t-1} + C$,

5. Dans le Traité de Lisbonne, TFEU art. 126.7, cette règle est exprimée ainsi : "[the EDP demands governments] to bring that situation to an end within a given period."(voir Collignon, 2012, p.544)

ainsi que l'analyse de ses propriétés, notamment des conditions de stabilité et de convergence. Une fois transformé, le système s'écrit désormais beaucoup plus simplement :

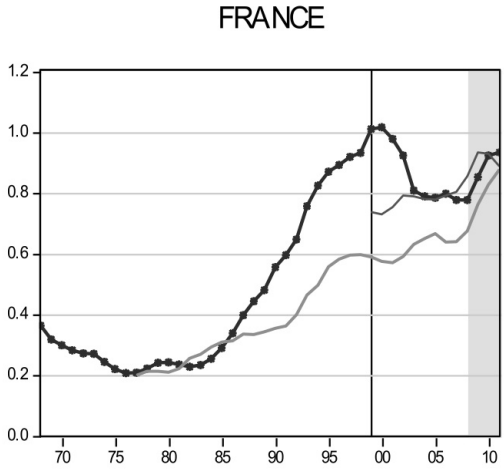
$$\begin{aligned} \dot{d(t)} &= (r-y)d(t) - s(t) \\ \dot{s(t)} &= (\alpha(r+\pi)+\beta)d(t) - \alpha s(t) - z \end{aligned} \tag{5}$$

L'état stationnaire de ce modèle se définit tel que :

$$\begin{aligned} \bar{s} &= (r-y)\bar{d} \\ \bar{d} &= \tfrac{z}{\alpha(y+\pi)+\beta} \end{aligned} \tag{6}$$

C'est en supposant que r, y et π varient au cours du temps, tout en étant exogènes au modèle que Collignon propose de "générer" une série temporelle contrefactuelle censée correspondre à une trajectoire de dette publique soutenable, à partir des estimations de α, β, et $z = \alpha z_1 + \beta z_2$. La figure 1 donne une illustration de cet exercice.

FIGURE 1 – Dette publique et contrefactuel d'après Collignon (2012)



Source : Collignon (2012). Note : La courbe gris clair représente la trajectoire réelle de la dette publique française. La courbe noire représente la trajectoire contrefactuelle calculée d'après l'expression de la dette à l'état stationnaire (6), à partir des estimations de α et z (β étant non significativement différent de 0 dans le cas de la France d'après Collignon) ainsi qu'à partir des taux de croissance du PIB et d'inflation (déflateur du PIB) pour chaque année ; la seconde courbe gris foncé représente un contrefactuel dans le cas où le taux d'inflation est fixé à 2%.

La question est maintenant de savoir si une trajectoire de dette soutenable peut être potentiellement non stationnaire. Blanchard et al. (1991) affirmaient déjà qu'un ratio croissant de dette publique peut vérifier la contrainte budgétaire intertemporelle de l'État. La démonstration peut être trouvée chez Romer (2011, Chap. 12) dans sa présentation de l'IBC. On le rappelle : la contrainte budgétaire intertemporelle de l'État stipule que la valeur actualisée de la somme de tous les surplus primaires futurs doit compenser l'endettement initial. De manière formelle, en actualisant selon le taux d'intérêt réel moyen r et le taux de croissance moyen y du produit, la contrainte budgétaire intertemporelle implique que :

$$\lim_{s\to\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-(r-y)t}s(t)dt - d(0)\right) \geq 0$$

d'où, en remarquant que :

$$-e^{(r-y)s}d(s) = \int_0^{\infty} e^{-(r-y)t}s(t)dt - d(0)$$

Si l'on considère dans le "pire" des cas que la dette publique s'accroît *asymptotiquement* à un taux constant γ tel que $d(s) = e^{\gamma s}d(0)$ avec $d(0)$ le niveau initial d'endettement, alors on peut déduire de la relation précédente :

$$\lim_{s\to\infty} e^{-((r-y)-\gamma)s}d(0) \leq 0$$

Dans le cas standard d'*efficience dynamique* $r > y$, cette dernière relation est vérifiée si et seulement si le taux de croissance moyen de l'endettement public γ est inférieur au taux d'intérêt ajusté de la croissance économique $(r - y)$. Autrement dit, un ratio toujours croissant d'endettement public peut néanmoins satisfaire la contrainte budgétaire intertemporelle sous la condition énoncée précédemment [6]. Compte-tenu du fait que ces propriétés valent pour un horizon infini, il est difficile d'en déduire une condition sur un échantillon temporel fini ; par ailleurs, d'après le travail de Bohn (2005) sur la soutenabilité de la politique budgétaire américaine sur longue période (1792-2003), on peut d'ailleurs remarquer que l'histoire de l'endettement public se résume en quelques rares évènements (guerres, révolutions industrielles et technologiques), qui déterminent de longs cycles d'endettement puis de désendettement, de telle sorte que sur longue période, le taux de croissance moyen du taux d'endettement public est excessivement faible si ce n'est nul ; ainsi, aux États-Unis, la variation totale a été de l'ordre de 0% pour la période 1792-2003 (voir figure 2). On peut donc

FIGURE 2 – Dette publique aux États-Unis, 1792-2003

U.S. budget deficits versus changes in the debt-to-GDP ratio

Period		Deficit with interest	Primary deficit	Interest charge	Nominal growth effect	Real growth effect	Inflation effect	Change in debt/ GDP
From	To	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1792	2003	1.2%	0.3%	0.9%	1.3%	0.8%	0.5%	0.0%
1792	1868	0.4%	−0.1%	0.5%	0.6%	0.5%	0.1%	−0.1%
1869	2003	1.7%	0.5%	1.2%	1.7%	1.0%	0.7%	0.0%
1792	1914	0.1%	−0.4%	0.5%	0.5%	0.5%	0.0%	−0.3%
1915	2003	2.8%	1.2%	1.6%	2.4%	1.2%	1.2%	0.4%

Note: The sample split in 1914 is motivated by World War I and the Sixteenth Amendment (start of income taxation). The 1868 sample split is motivated by the American Civil War. Interest charge refers to the difference between with-interest and primary deficits. Growth effects refer to the reduction in nominal/real debt/GDP owing to GDP growth.

Source : d'après Bohn (Neck and Sturm, 2008, Chap.2)

raisonnablement considérer que ce système à deux équations permet effectivement de générer une trajectoire de dette publique soutenable qui ne soit pas forcément stationnaire mais puisse au contraire varier selon les variations du taux de croissance et du taux d'inflation de l'économie. Une démonstration alternative et peut-être plus rigoureuse peut être trouvée chez Bohn (2007), puisque une série de dette publique intégrée d'ordre n, pour un n arbitrairement élevé, n'implique pas selon lui que la contrainte budgétaire intertemporelle (i.e. la condition de transversalité) soit violée.

6. Dans le cas d'une situation d'*inefficience dynamique* $r - y \leq 0$, la condition de transversalité n'aurait pas besoin d'être vérifiée et l'État pourrait mettre en place une chaine de Ponzi (financement de la dette initiale par une dette future) ; cela impliquerait seulement que le niveau de dette publique diminuerait de lui-même.

Le système obtenu est finalement simple puisqu'il se compose uniquement d'une équation de comportement décrivant la réponse budgétaire à des objectifs de déficit et de dette publique et d'une équation décrivant à la fois la dynamique de la dette publique et la contrainte budgétaire instantanée de l'État. Toutes les variables macroéconomiques d'intérêts – taux d'inflation, taux de croissance du PIB, taux d'intérêt de long-terme – étant supposées exogènes vis-à-vis du solde primaire et de la dette publique.

3.1.2 Angles morts : variables exogènes et absence de modélisation de la prime de risque

Le statut d'éxogénéité de ces variables macroéconomiques constituent des angles morts préjudiciables pour l'analyse de la soutenabilité de la dette publique. En premier lieu, les questions d'interaction entre politique monétaire et politique budgétaire sont complètement absentes alors que le taux d'intérêt réel de long-terme dépend de l'état de la politique monétaire à court et moyen terme, *via* l'inflation courante et anticipée, mais peut également dépendre de la politique budgétaire dès lors que le taux long sur les obligations publiques est probablement sensible à l'endettement public, que ce soit à travers le niveau de dette qu'à travers celui de déficit (Baldacci and Kumar, 2010). Ce modèle ne permet pas non plus de traiter la question de l'impact de l'endettement public sur la croissance économique, c'est-à-dire des multiplicateurs budgétaires : si le multiplicateur budgétaire est significativement positif et compris, en moyenne, entre 0,5 et 1 – ce qui peut une hypothèse plausible au regard de la littérature empirique existante [7] (Blanchard and Perotti, 2002; Biau and Girard, 2005; Auerbach and Gorodnichenko, 2012; Ilzetzki et al., 2013) - alors on peut raisonnablement penser que les critères de convergence vers l'état stationnaire se trouveraient modifiés, tenant compte des effets récessifs, à court terme, des politiques de consolidation budgétaire.

Collignon fait ici le choix de la simplicité. A la décharge de l'auteur, le fait d'ignorer délibérément les questions de politiques macroéconomiques, aussi bien monétaire que budgétaire ou encore leur interaction, pourrait tout aussi bien trouver une justification *ad hoc* dans le cadre de l'Union Monétaire Européenne, dès lors que l'on remarque que chaque gouvernement n'a aucun pouvoir de décision en matière de politique monétaire compte-tenu de l'indépendance de la Banque centrale européenne. Pour ce qui est de la politique budgétaire l'argument d'une perte d'autonomie des États membres de l'Union monétaire semble moins solide si l'on se réfère à Gali and Perotti (2003) qui démentent l'idée, couramment avancée, selon laquelle la construction de l'Union monétaire et l'application des critères du SGP ont privé les États membres de toute liberté en matière de politique macroéconomique de stabilisation. Contre ces résultats antérieurs, avec un recul historique un peu plus important, Collignon avance cependant que le SGP semble avoir significativement réduit la capacité à mener une politique contracyclique [8].

7. Ceci étant, certains articles récents tendent à montrer que la valeur des multiplicateurs peut varier de façon importante, à la fois selon les caractéristiques structurelles des pays et des dépenses publiques (niveau de développement, ouverture commerciale, régime de change, taux d'endettement, dépenses d'investissement, etc.) comme le montrent Ilzetzki et al. (2013) à partir d'un modèle panel SVAR, mais également du contexte macroéconomique (avec un multiplicateur plus élevé en période de récession), d'après Auerbach and Gorodnichenko (2012) qui utilisent quant à eux un modèle de type Markov-switching SVAR avec paramètres variant dans le temps (*time-varying parameters*).

8. Il estime en effet une fonction de réaction fiscale de la forme

$$\Delta s_t = c + \alpha_{str}\text{Structuraldef}_t + \alpha_{cyc}\text{Cyclicaldef}_t + \beta\text{Debt}_t + \varepsilon_t$$

pour 10 pays de la Zone Euro et obtient des estimations $\hat{\alpha}_{cyc} \geq 0$ pour une majorité de pays, à l'exception de l'Autriche et de l'Italie ; il commente ainsi ces résultats : "*These estimates confirm the result (...) that the SGP restricts fiscal policy in the Euro Area more than in the out-countries* (p.551)". Cependant il faut remarquer que ces estimations sont rarement significatives : la politique budgétaire serait alors ou bien procyclique ou bien acyclique. Cependant, comme pour l'ensemble des estimations proposées par l'auteur, la présence d'un régresseur non stationnaire (dette publique) laisse suspecter le risque de régression fallacieuse, cf. *infra*.

La question de l'absence de modélisation de prime de risque sur les obligations publiques est plus épineuse. L'auteur le fait d'ailleurs remarquer en notant que son modèle ne tient absolument pas compte du problème de liquidité, c'est-à-dire la capacité à pouvoir emprunter sur les marchés financiers, de telle sorte qu'un État pourrait être soutenable, c'est-à-dire satisfaire à des critères définis sur les paramètres de la fonction de réaction (cf. *infra*), mais poussé malgré tout au défaut : "*Paradoxically, if markets lose confidence that the government is able to raise the necessary funds, a government may be pushed into default despite being fundamentally solvent.*" (Collignon, 2012, p.546). L'introduction d'une fonction de prime de risque revient à exprimer au sein du modèle une relation telle que le taux d'intérêt dépend de l'endettement public, de façon à ce qu'un accroissement de la dette publique entraine la hausse du taux d'intérêt par rapport au taux d'intérêt de l'actif faiblement risqué (par exemple, si l'on considère le marché européen des obligations publiques, le Bund allemand à 10 ans) ou autrement dit, de façon à ce qu'il entraine un accroissement du *spread* de taux sur les obligations publiques.

C'est que nous proposerons de faire par la suite dans les sections 4 et 5, selon différentes stratégies.

3.1.3 Critères de soutenabilité : une erreur dans l'article de Collignon

Venons-en désormais à la question des conditions de stabilité du système dynamique(5). L'auteur propose de l'étudier selon deux cas particuliers :

- $\alpha \geq 0$ et $\beta = 0$ (réponse à une cible de déficit)
- $\alpha = 0$ et $\beta \geq 0$ (réponse à une cible de dette)

L'étude de ces deux cas se justifient d'un point de vue empirique, d'après l'estimation de la fonction de réaction budgétaire menée par Collignon (2012) : en effet, les pays européens se caractérisent souvent par une politique budgétaire focalisée sur une cible de déficit, tandis que les seuls pays à avoir une politique budgétaire ayant une cible de dette sont la Belgique, l'Irlande et le Royaume-Uni.

Definition 1. *La soutenabilité de la dette publique s'analyse à partir d'une fonction de réaction budgétaire comme les conditions sur les paramètres de cette fonction, pour lesquels le système dynamique, composé* a minima *d'une équation de contrainte budgétaire et de la fonction de réaction, est stable : c'est-à-dire converge vers son état stable, quelque soit le niveau initial de dette publique.*

Dans le cas de la fonction de réaction proposée par Collignon, il s'agit de trouver des conditions sur α ou sur β telles que la dette publique converge vers l'état stable défini par le système (6) [9].

Réponse à une cible de déficit. Dans ce cas, les critères proposés par Collignon sont assez simples et intuitifs. Dans un système dynamique à deux équations différentielles, Collignon distingue deux cas qui sont i) la soutenabilité faible ou convergence oscillatoire vers l'état stable du système et ii) la soutenabilité forte ou convergence monotone et rapide vers l'état stable. La soutenabilité faible est la condition la moins exigeante, celle pour laquelle le polynôme caractéristique associé au système (5) admet deux racines complexes et toutes deux de partie réelle négative. La soutenabilité forte est le cas où le polynôme caractéristique admet deux racines réelles négatives.

La démonstration amène à distinguer ainsi deux conditions sur α, que Collignon nomme α_{min} et α_{crit}, telles que la politique budgétaire est faiblement soutenable si $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{crit}$ et fortement soutenable si $\alpha > \alpha_{crit}$.

9. On rappelle que cet état dit "stable" n'est stationnaire que par rapport à la dynamique de la dette publique ; comme précisé plus tôt, si l'on utilise les taux *annuels* de croissance nominal de l'économie pour calculer $\bar{d}$, on obtient une trajectoire "stable" ou soutenable mais non stationnaire.

Proposition 1. Sachant que $\alpha \geq 0$ et que $\beta = 0$, une condition suffisante sur α pour la soutenabilité faible de la politique budgétaire est :

$$\alpha > \alpha_{min} = \max\left(r - y, (\sqrt{r+\pi} - \sqrt{y+\pi})^2\right)$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} \alpha_{min} = r - y & \text{si} \quad r > y \\ \alpha_{min} = (\sqrt{r+\pi} - \sqrt{y+\pi})^2 & \text{si} \quad r < y \end{cases}$$

Proposition 2. Sachant que $\alpha \geq 0$ et que $\beta = 0$, une condition suffisante sur α pour la soutenabilité forte de la politique budgétaire est :

$$\alpha > \alpha_{crit} = (\sqrt{r+\pi} + \sqrt{y+\pi})^2$$

Nous avons vérifié ces propositions et elles sont effectivement correctes. Nous avons ré-effectué leur démonstration, celle-ci est disponible dans l'annexe.

Réponse à une cible de dette publique. Dans le cas d'une règle de politique budgétaire focalisée sur une seule cible de dette, Collignon propose la condition suivante sur β sachant $\alpha = 0$:

$$\beta > (r - y)^2$$

Ici, il nous semble y avoir une erreur dans l'article de Collignon (2012). Aucune démonstration de cette proposition n'est apportée dans l'annexe mathématique de l'article et nous ne sommes pas parvenus à retrouver cette condition sur β. Nous avons obtenu, au contraire, des conditions significativement différentes, et nous en apportons la preuve dans l'annexe mathématique à la fin de ce mémoire.

Proposition 3. Nous corrigeons ici la proposition relative à la soutenabilité d'une politique budgétaire seulement caractérisée par une cible de dette publique. Dans le cas $\beta > 0$ et $\alpha = 0$, la seule solution pour la politique budgétaire d'être soutenable est de vérifier :

$$\begin{cases} \beta & > & 0 \\ y & > & r \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'une politique budgétaire focalisée sur un objectif de dette publique n'est soutenable qu'à la condition d'une réponse positive du solde public primaire et seulement si le taux d'intérêt réel de long-terme sur les obligations publiques est inférieur au taux de croissance de l'économie (*inefficience dynamique*).

Conséquences théoriques : soutenabilité et cible de dette publique. La proposition 3 révèle une intéressante propriété de la fonction de réaction budgétaire définie par Collignon. En effet, elle montre que dans le cas d'une règle budgétaire de la forme de l'équation (3), la soutenabilité de la dette publique *ne peut pas être assurée* par une condition sur le paramètre β de la fonction de réaction ; dans ce cas-là, elle ne peut être garantie qu'à condition d'une réponse positive $\beta > 0$ *et* que $y > r$, c'est-à-dire que la dynamique auto-entretenue de la dette publique (*via* la

différence $r - y$) soit inversée et mène à une réduction quasi-autonome du niveau d'endettement. Cela-dit, il faut tout de remarquer que même dans ce cas-là, la variation du surplus primaire doit répondre *positivement* au niveau de dette initiale, ce qui prévient la mise en place d'une chaine de Ponzi et assure la convergence vers un niveau d'endettement qui, *a minima*, ne soit pas explosif.

Pour garantir la convergence du système, en fonction d'une cible de dette, il aurait fallu que la fonction de réaction budgétaire ne décrive non pas la *variation* du surplus primaire en fonction de l'écart de la dette publique à sa valeur-cible, mais plutôt le *niveau* du surplus primaire en fonction de cet écart. Autrement dit, si l'on s'accorde pour dire que la fonction de réaction budgétaire proposée par Collignon représente correctement le cadre institutionnel du SGP et de l'EDP, alors on peut raisonnablement affirmer que ce cadre ne garantit pas la soutenabilité d'une politique budgétaire uniquement focalisée sur l'objectif des 60%.

3.2 Estimation et tests de soutenabilité

Ce modèle dynamique à deux équations semble donc permettre de définir, dans le cas du SGP et de l'EDP, une règle de politique budgétaire telle que la soutenabilité de la dette publique – que l'on a définie comme la convergence de la dette vers une trajectoire non explosive, potentiellement croissante et non stationnaire – soit garantie.

A supposer que l'on puisse obtenir des estimations robustes des paramètres de la fonction de réaction, c'est-à-dire de α et β mais également une estimation implicite des cibles z_1 et z_2, alors il serait possible :

- de définir une trajectoire soutenable de dette publique ou un niveau moyen d'endettement public soutenable, si l'on considère des taux moyens de croissance économique et d'inflation plutôt que les taux annuels, dans le calcul de $\bar{d}$ d'après le système (6) ;
- de calculer les seuils de soutenabilité α_{min} et α_{crit} à partir des moyennes du taux d'intérêt de long-terme, du taux de croissance économique et du taux d'inflation ;
- d'effectuer des tests unilatéraux (tests de Student) sur la valeur des paramètres α et β afin de déterminer s'ils sont significativement supérieur au seuil de soutenabilité définis à la section précédente.

Dans cette section nous proposons de revenir sur les estimations de la fonction de réaction budgétaire réalisées par Collignon et de reprendre la présentation de ses résultats, notamment concernant la confrontation des estimations de α par rapport aux seuils de soutenabilité faible et forte.

3.2.1 Le risque de régression fallacieuse en présence de régresseurs non stationnaires

Si la soutenabilité de la dette publique pose question c'est justement que le ratio d'endettement public n'est quasiment jamais stationnaire, et que par conséquent l'analyse économétrique se tourne vers la théorie de la cointégration afin de tester la cointégration des séries de dépenses et de recettes publiques (voir Afonso, 2005, pour une présentation claire et synthétique). Sans présenter ici les résultats de différents tests de racine unitaire (ADF) ou de stationnarité (KPSS), on peut cependant admettre qu'une très large majorité des pays de la Zone Euro, et plus largement de l'Union Européenne, présentent une trajectoire de dette publique qui soit $I(1)$ (voir INSEE, 2004; Afonso, 2005, pour la France et l'ensemble des pays-membres de l'UE). De là, l'introduction de la variable de dette publique dans le modèle de régression nous expose au risque de régression fallacieuse (*spurious regressions*).

Tests de racines unitaires et de stationnarité sur données de panel Pour justifier l'introduction de la variable de dette publique dans son modèle de régression, Collignon effectue des tests

de racines unitaires et de stationnarité sur données de panel (voir Collignon, 2012, Annexe A.2, pp.564-565). Un descriptif de ses données (leur source et leur description est disponible à l'annexe B) s'impose ici : Collignon dispose d'un panel de 14 pays membres de l'UE, en données annuelles, de 1978-2008 soit 31 observations ; il utilise 3 variables :

- la variation du surplus primaire corrigé du cycle économique (CAPS en anglais, *cyclically adjusted primary surplus*) ;
- le déficit public au sens de Maastricht et de l'EDP, en points de PIB ;
- la dette publique au sens de Maastricht ;

Il définit également un panel restreint à 10 pays-zone euro, sur la même période et comprenant les mêmes variables.

Un œil attentif remarquera que dans le descriptif de ces tests de racines unitaires sur données de panel, il est dit que le test est mené simultanément sur *les trois variables du modèle* pour chacun des pays et sur la période entière, soit $3 \times 14 = 42$ *cross-sections*. Ce constat est assez surprenant dans la mesure où il indique que le test a été mené de telle façon que chaque variable pour chaque pays constituait un individu du point de vue du panel ; autrement dit, de 14 individus Collignon passe à 42 individus dans son panel. Il nous semble que cette procédure est faussée, si l'objectif initial est de tester la stationnarité des séries que l'on soupçonne d'être $I(1)$, *i.e.* les séries de dette publique : en effet, en construisant le panel comme si chaque échantillon de 31 observations par pays pour chaque variable constituait un individu du panel, on biaise immédiatement le test de stationnarité. En effet, les variables ΔCAPS et de déficit sont généralement stationnaires, et la probabilité qu'elles soient $I(1)$ est faible. Aussi, la non stationnarité des séries de dette publique (14 "individus") est vraisemblablement "noyée" parmi l'ensemble des observations des 28 "individus" restants de ce "panel". D'où le fait que Collignon rejette, à l'issue de ces tests, les hypothèses de racines unitaires communes et individuelles avec un niveau de confiance élevé.

Par ailleurs, sans les présenter ici, nous avons entrepris de réaliser nous-mêmes ces tests de racines unitaires sur données de panel sur Stata. Premier constat : en déclarant les données sous forme de panel (une variable d'identifiant "pays", une variable "date" et les 3 variables mentionnées plus tôt), la procédure de test de racines unitaires sur données de panel ne permet en aucun cas de mener le test de manière simultanée sur les 3 variables du panel – ce qui soulève de nombreuses interrogations sur la manière dont Collignon a construit son panel et a mené son test. Nous avons donc effectué ces tests pour la série de dette publique, en données de panel. Deuxième constat : ces tests ne permettent en aucun cas de rejeter, l'hypothèse de racines unitaires commune (test de Levin, Lin et Chu, test de Breitung) ou individuelles (test de Im, Pesaran et Shin, test Panel-ADF) et le test de stationnarité (test de Hadri) rejette très fortement l'hypothèse nulle de stationnarité.

Une dernière interrogation au sujet de la démarche de Collignon est celle de la pertinence du recours aux tests de racines unitaires sur données de panel. Il le justifie par leur puissance par rapport aux tests standards [10]. Cependant, quand bien même ces tests auraient conclu à la stationnarité ou à l'absence de racines unitaires dans le panel, cette procédure n'est probablement justifiée que dans le cas de l'estimation d'un modèle de panel, c'est-à-dire une équation commune à tous les pays du panel. Or la stratégie retenue par Collignon n'est pas une estimation d'un modèle de panel mais celle d'une estimation SUR (*Seemingly Unrelated Regressions*, c'est-à-dire l'estimation par FGLS (*Feasible Generalized Least Squares*) d'un système d'équations simultanées, reliées entre elles par la matrice de variance-covariance des résidus. En clair, cette stratégie d'estimation répond à deux objectifs : étudier des équations propres à chaque pays (la politique budgétaire est spécifique est à chaque pays membre de l'UE) mais tenir compte des interdépendances transversales entre

10. Voir la note de bas de page numéro 14, Collignon (2012, p.548)

chaque pays (la politique budgétaire en Allemagne affecte celle du Danemark ou de la France, et réciproquement), d'où le fait que l'on suspecte que les résidus de la régression pour chaque pays soient corrélés à ceux des autres pays du panel. Aussi, la procédure SUR effectue bel et bien une régression spécifique à chaque pays et corrigée d'une estimation de la matrice de variance-covariance des résidus du modèle empilé.

On peut donc raisonnablement suspecter que l'introduction, dans chaque équation estimée, d'un régresseur non stationnaire puisse induire un biais dans les résultats d'estimation de α, β et de leurs écarts-types estimés, et ce d'autant plus que la profondeur historique de l'échantillon est faible.

3.2.2 Critères de soutenabilité et tests de Student

Nous avons entrepris de ré-estimer l'équation de réaction budgétaire définie par Collignon, sous la forme :

$$\Delta s_t = c + \alpha def_{t-1} + \beta d_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7}$$

où $c = -z$ le paramètre qui condense cibles de déficit, de dette et coefficients de réponse. Cependant, pour nous prémunir contre le risque de régression fallacieuse nous avons également estimé l'équation suivante :

$$\Delta s_t = c + \alpha def_{t-1} + \varepsilon_t \tag{8}$$

On pourrait objecter, avec raison, que ces équations n'introduisent aucune variable de contrôle. Cependant, deux réponses peuvent être apportées : l'une est que le nombre d'observations étant extrêmement faible (31 observations), l'introduction de variables supplémentaires ne ferait qu'affaiblir la puissance des tests de significativité sur les paramètres estimés en diminuant leur degré de liberté ; l'autre réponse que l'on peut faire est que le choix de la variable ΔCAPS permet de contrôler en partie l'effet du cycle sur la politique budgétaire, et que l'intérêt se trouve essentiellement dans la possibilité d'obtenir une estimation significative et précise de c, α et éventuellement de β. Si l'on disposait de données plus longues, il serait intéressant d'intégrer des variables telles que le taux de chômage structurel estimée (NAIRU) ou le taux de chômage effectif ou encore le solde du compte courant, voire des variables indicatrices pour signaler les années d'élections nationales.

Données. Le descriptif des sources et des variables est disponible dans l'annexe B. Une première limite de notre travail réside dans notre incapacité à reconstruire un échantillon identique à celui utilisé par Collignon (2012) : en effet, il apparait que certaines des séries, correspondant au système harmonisé ESA 1995 et mises à disposition par la Commission Européenne sur la plate forme Ameco Online, ne couvrent pas toute la période 1978-2013 [11]. C'est le cas notamment pour la Grèce, l'Espagne, l'Italie, l'Irlande, la Grèce, la Suède et le Royaume-Uni, pour les séries ΔCAPS et de déficit ; certaines séries ne remontent seulement que jusqu'en 1995. Collignon semble avoir obtenu des séries plus longues, antérieures au système ESA 1995 auprès de la Commission Européenne ; malheureusement, il n'a pas répondu à la demande que nous lui avons faite de nous envoyer les données qu'il avait utilisées pour réaliser ses estimations. Par conséquent, nous avons estimé chacune des deux équations présentées plus tôt sur deux périodes différentes :

- Échantillon 1995-2013 : on dispose alors 18 observations pour 14 pays, ce qui est vraiment faible ;
- Échantillon 1978-2013 : on dispose alors de 35 observations pour 8 pays dont 7 pays membres de la Zone Euro ;

11. Compte tenu de la forme de l'équation estimée, nous incluons les prévisions de la Commission Européenne de la variable ΔCAPS pour l'année 2013, en lien avec les observations de déficit et de dette datant de 2012.

TABLE 1 – Résultats d'estimation pour l'équation (7)

Modèle SUR 8-pays, 1978-2013

Pays	c	α	β	R^2	F–stat
France	– 0.006	0.356***	– 0.012	0.19	7.57***
	0.004	0.094	0.008		
Allemagne	– 0.020*	0.631***	0.012	0.33	8.93***
	0.011	0.150	0.018		
Finlande	– 0.001	0.157**	0.004	0.09	4.71***
	0.007	0.071	0.018		
Danemark	– 0.008	0.167**	0.013	0.18	5.12***
	0.008	0.07	0.015		
Portugal	– 0.045***	0.675**	0.016	0.32	12.36***
	0.012	0.140	0.014		
Autriche	– 0.015	0.329**	0.010	0.15	3.05**
	0.010	0.141	0.016		
Belgique	– 0.032**	0.144***	0.023*	0.25	5.75***
	0.014	0.053	0.012		
Pays-Bas	– 0.008	0.299***	– 0.001	0.25	5.83***
	0.010	0.095	0.017		

Note : Les écarts-types estimés figurent en-dessous de leurs paramètres respectifs. Légende : *p-value $<$ 10%, **p-value $<$ 5%, ***p-value $<$ 1%.

Dans la mesure où l'échantillon le plus large (en terme de pays) n'a pas de profondeur historique assez importante, nous préférons ne pas présenter les résultats obtenus pour cet échantillon. Nous présenterons seulement les résultats obtenus pour le second échantillon, et nous nous y référerons exclusivement par la suite.

Résultats. Les résultats d'estimation des équations (7) sont présentés à la table 1. Malgré les différences d'échantillons et de "panel", les résultats de l'estimation SUR que nous obtenons sont proches de ceux de Collignon. Le paramètre α est généralement significativement positif dans la plupart des cas. Les constantes estimées sont plus rarement significatives, mais sont néanmoins du "bon signe" (c'est-à-dire négatives, comme on l'attendait d'après la spécification de la fonction de réaction budgétaire).

Quelques légères différences sont toutefois à noter ; elles tiennent peut-être compte des dernières observations (2009-2013) que nous avons ajoutées, qui sont caractérisées par de fortes variations des surplus primaires structurels, de forts déficits et des niveaux de dette publique sans précédent. On remarque ainsi que l'estimation de α pour la France passe de 0.28 (Collignon, 2012, p.550) à 0.36 pour nos estimations de l'équation (7). Le paramètre β est nettement moins souvent significatif, ce qui confirme le résultat de Collignon, à savoir que peu de pays suivent une règle budgétaire focalisée sur une cible de dette. Cependant, comme nous en faisions état plus tôt, ces résultats sont fortement sujets à caution, compte-tenu de la non stationnarité de la dette publique. Aussi, la comparaison avec l'estimation de l'équation (8) peut s'avérer pertinente, puisqu'elle mettra d'apprécier la stabilité des estimations de α.

Les résultats d'estimation de l'équation (8) sont présentés à la table 2. De façon générale on observe une certaine stabilité pour la valeur des paramètres estimés ; mais on peut remarquer que l'estimation pour la France de α est significativement différente de celle obtenu à la table 1. Curieusement, elle se rapproche de celle obtenue par Collignon avec l'équation estimée (7) puisque nous obtenons 0.26 contre 0.28. Au regard des résultats obtenus, quand on sait qu'il fait partie

TABLE 2 – Résultats d'estimation pour l'équation (8)

Modèle SUR 8-pays, 1978-2013

Pays	c	α	R^2	F–stat
France	– 0.008***	0.259***	0.20	11.18***
	0.003	0.078		
Allemagne	– 0.013***	0.606***	0.32	16.09***
	0.005	0.151		
Finlande	0.001	0.156***	0.09	8.24***
	0.003	0.054		
Danemark	– 0.001	0.190***	0.17	9.10***
	0.002	0.063		
Portugal	– 0.036***	0.678***	0.30	23.32***
	0.008	0.140		
Autriche	– 0.009**	0.331**	0.15	5.63**
	0.004	0.139		
Belgique	– 0.008*	0.152***	0.18	7.56***
	0.004	0.055		
Pays-Bas	– 0.008**	0.281***	0.24	10.86***
	0.003	0.085		

Note : Les écarts-types estimés figurent en-dessous de leurs paramètres respectifs. Légende : *p-value $< 10\%$, **p-value $< 5\%$, ***p-value $< 1\%$.

des pays d'Europe du Sud qui peinent à accéder aux marchés financiers pour s'endetter, le cas du Portugal se révèle assez intéressant : qu'il s'agisse des résultats présentés à la table 1 aussi bien qu'à la table 2, le paramètre α est de loin le plus élevé du panel et également fortement significatif. Nous avons cherché à déterminer si cette estimation pouvait être biaisée compte-tenu d'une possible non stationnarité du déficit public, cependant un test ADF sur la série de déficit conclut au rejet avec un haut niveau de confiance de l'hypothèse de racine unitaire ; qui plus est, cette estimation est assez stable, que l'on introduise ou non la variable de dette publique.

Bien sûr, des tests de robustesse plus poussés devraient être menés sur ces régressions, mais il semblerait tout de même que le Portugal est un des pays Européens qui, *a priori*, a le plus de chances de connaitre une trajectoire de dette soutenable, compte-tenu du niveau élevé de son α.

En ce qui concerne la valeur du paramètre β, nous pouvons admettre, comme Collginon le faisait, qu'il est rarement significativement différent de zéro. Ceci implique que l'analyse de la soutenabilité se focalise sur α et sur les propositions 1 et 2 énoncées plus tôt comme nous allons nous y employer maintenant.

Tests de soutenabilité. Dans son article, Collignon (2012, voir pp.558-559) se contente de comparer les estimations obtenues pour α aux seuils (calculés comme des moyennes sur l'ensemble de la période) α_{min} et α_{crit}, voir table 3. Selon nous, cette présentation des résultats est incorrecte : dans la mesure où α est un paramètre estimé, une procédure rigoureuse de mener ces tests de soutenabilité revient à effectuer des tests de Student unilatéraux sur la valeur des paramètres.

La table 3 montre que le seuil minimal moyen pour α est toujours égal au seuil $\alpha_{min}^{\text{eff}}$, c'est-à-dire que les pays de notre panel n'ont pas fait l'expérience, en moyenne, d'une situation d'*inefficience dynamique*. Une nette différence de nos résultats avec ceux de Collignon se trouve au niveau du seuil minimal pour le Portugal : d'après les calculs de Collignon, le Portugal a connu en moyenne une situation d'*inefficience dynamique*, ce que nous ne retrouvons pas. Sans pouvoir l'expliquer avec certitude, nous pensons que cela tient à nos données manquantes, l'auteur ayant

TABLE 3 – Synthèse des résultats d'estimation et des seuils de soutenabilité moyens

Pays	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma_\alpha}$	$\alpha_{min}^{\text{eff}}$	$\alpha_{min}^{\text{inef}}$	α_{min}	α_{crit}
France	0.259	0.078	0.019	0.001	0.019	0.245
Allemagne	0.606	0.151	0.017	0.002	0.017	0.192
Finlande	0.156	0.054	0.016	0.001	0.016	0.273
Danemark	0.19	0.063	0.03	0.003	0.03	0.258
Portugal	0.678	0.14	0.01	0.0001	0.01	0.431
Autriche	0.331	0.139	0.014	0.001	0.014	0.212
Belgique	0.152	0.055	0.024	0.002	0.024	0.23
Pays-Bas	0.281	0.085	0.019	0.002	0.019	0.205

Note : les estimations $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma_\alpha}$ (écart-type estimé) reprises ici proviennent de la table 2. Le calcul des seuils de soutenabilité a été effectué à partir des séries de taux d'intérêt réel de long-terme, de taux de croissance du PIB en volume et du taux d'inflation (déflateur de PIB) ; ils sont calculés pour chaque pays à partir de la moyenne de chaque série sur la période 1979-2012 (sauf exception pour le Portugal, en raisons de données manquantes pour le taux d'intérêt réel, de 1979 à 1984), d'après les propositions 1 et 2 énoncées précédemment. On rappelle que le seuil minimal α_{min} est le maximum de deux seuils qui sont appelés ici $\alpha_{min}^{\text{eff}}$ et $\alpha_{min}^{\text{inef}}$.

TABLE 4 – Résultats des tests de soutenabilité : tests de Student unilatéraux

	Soutenabilité faible		Soutenabilité forte	
Pays	t-stat	p-value	t-stat	p-value
France	3.0769	0.0021	0.1795	0.4293
Allemagne	3.9007	0.0002	2.7417	0.0049
Finlande	2.5926	0.0070	-2.1667	0.9812
Danemark	2.5397	0.0080	-1.0794	0.8559
Portugal	4.7714	<0.0000	1.7643	0.0435
Autriche	2.2806	0.0146	0.8561	0.1991
Belgique	2.3273	0.0131	-1.4182	0.9172
Pays-Bas	3.0824	0.0021	0.8941	0.1889

Note : les tests de Student présentés ici sont réalisés à partir des estimations de α obtenues pour l'équation (8), table 2. Lecture : pour une p-value (probabilité de l'erreur de première espèce) supérieure à 5% on considère ne pas pouvoir rejeter avec un niveau de confiance suffisamment élevé l'hypothèse nulle (H0 : "non soutenabilité de la dette publique").

probablement eu accès à une série complète ; cela peut aussi s'expliquer, de façon marginale, par l'ajout des observations pour les années 2009-2010-2011-2012 : le Portugal ayant vu son taux d'intérêt réel exploser depuis 2007.

Résultats des tests. Les résultats sont présentés à la table 4. On rappelle que ces tests de Student unilatéraux sur la valeur de α ont pour objet de rejeter l'hypothèse nulle, selon les seuils considérés, de soutenabilité faible ou forte. Il est à noter que ces tests unilatéraux, si l'on inverse les hypothèses nulles et alternatives, sont parfaitement symétriques : aussi rejeter l'hypothèse de non-soutenabilité est équivalent à ne pas rejeter l'hypothèse de soutenabilité.

Tout d'abord, tous les tests effectués pour $\alpha > \alpha_{min}$ concluent à la soutenabilité faible de la politique budgétaire (ou de la dette, de façon équivalente) puisqu'on rejette l'hypothèse nulle d'une dette insoutenable avec un niveau de confiance élevé. Jusqu'ici, nous confirmons les conclusions de Stefan Collignon, qui ne faisait que comparer la valeur des estimations de α aux seuils de soutenabilité.

Notre démarche conduit cependant à des conclusions plus nuancées concernant la soutenabilité forte. En effet, alors que Collignon concluait en affirmant que tous les pays de son panel étaient fortement soutenables :

> "I find, first, that all Euro Area member states, including Greece, fulfill the condition of strong sustainability, i.e., monotonic convergence to the steady state. However, this is only marginally true for Finland and not the case for the Two Scandinavian out-countries" (Collignon, 2012, p.559)

nous concluons à l'inverse, pour les pays pour lesquels nous présentons des résultats, que seuls le Portugal et l'Allemagne suivent une politique budgétaire fortement soutenable. La France, la Belgique, la Finlande ou encore le Danemark, l'Autriche et les Pays-Bas ne satisfont pas cette condition. Que seules les dettes publiques de l'Allemagne et du Portugal soient fortement soutenables peut surprendre, quand on a en tête que la première apparait comme valeur refuge, comme pays-modèle de la Zone euro pour sa politique budgétaire, tandis que le Portugal fait face, au même titre que l'Espagne, l'Italie, la Grèce et l'Irlande, à la défiance des marchés obligataires...

Ce dernier point tendrait à rappeler que la crise des dettes souveraines est bien moins la conséquence de politiques budgétaires fondamentalement insoutenables que celle d'une crise des balances des paiements des pays membres de l'Union Monétaire Européenne ; crise des balances des paiements elle-même symptôme du manque d'intégration budgétaire de la zone euro. En effet, comme le montre Barnes (2010), les pays d'Europe du nord ont enregistré au cours des années 2000 des surplus extérieurs, dont une part significative restait inexpliquée [12] par la théorie standard des flux financiers et des processus de rattrapage [13]. Les excédents des pays d'Europe du nord, ont afflué vers les pays sud, finançant *de fait* les déficits du compte courant des pays d'Europe du sud. Ce phénomène s'est accentué à la faveur d'une politique monétaire commune, menant à une modération des taux d'intérêt pour toute la zone euro, et ce malgré des taux d'inflation significativement différents selon les pays membres de la zone monétaire, en particulier dans les pays ayant connu d'importants déficits du compte courant où l'inflation était significativement plus forte que la cible des 1.5-2% de la BCE, ce qui s'est qui s'est traduit par une large baisse des taux d'intérêt réels et, par conséquent, par une allocation sous-optimale du capital.

12. Barnes (2010, p.9) :"*While observed factors and historical relationships typically explain the sign of the imbalance, they tend to underestimate the size. Between 2004 and 2008, both the large current account surpluses of Germany and the Netherlands, and the major deficits in Greece, Portugal and Spain, have greater unexplained components in this model than for other euro area countries.*"

13. Une explication optimiste de ces déséquilibres de la balance des paiements faisait référence aux théorie de la croissance et de l'allocation optimale du capital : les flux financiers massifs en direction de l'Europe du sud étaient censés être justifiés par une rentabilité du capital plus élevée des pays d'Europe du sud ; autrement dit, ces flux étaient l'expression du rattrapage en terme d'accumulation du capital et de productivité horaire du travail de ces pays. Cette accumulation de déficits courants et cette dégradation de leur position extérieure nette étaient censées, toujours selon cette explication, être financées par de futurs excédents du compte courant d'après une approche intertemporelle du compte courant.

4 Essai de modélisation de l'effet d'une prime de risque

Dans la précédente section, nous avons repris en détails le modèle à deux variables proposé par Collignon. Nous proposons désormais d'apporter une modification à ce modèle, pour répondre à une des critiques que nous lui avons adressées. Un angle mort de ce modèle était d'ignorer complètement le phénomène de prime de risque et le risque de crise de liquidité pour un État, que l'on définit comme son incapacité totale ou partielle à se financer à moyen et long terme sur les marchés financiers. Il est à noter tout particulièrement que l'introduction d'une prime de risque sur le taux d'intérêt, directement liée au niveau d'endettement public, rend le système non linéaire. L'objectif est par conséquent de construire un modèle dynamique à deux variables caractérisé à la fois par : un état stationnaire où le solde primaire est une fonction non linéaire du niveau d'endettement, ainsi que par des conditions de stabilité qui dépendent du niveau d'endettement stationnaire, compte-tenu de la non linéarité du modèle.

En effet, dans le modèle initial, les conditions de stabilité sont supposées exogènes, en particulier par rapport au niveau stationnaire de dette publique défini par ce système : autrement dit, une trajectoire soutenable $\bar{d}$ peut être croissante (compte-tenu d'une faible croissance nominale du produit), le service de la dette publique dépendant de façon linéaire de ce ratio $\bar{d}$ (cf. système (6)). On pourrait certes objecter que les taux d'intérêt, que l'on utilise pour calculer les seuils de soutenabilité, intègrent déjà cette prime de risque ; cependant la non-linéarité du système modifié présente bel et bien une différence en terme de dynamique et les conditions de stabilité se durcissent effectivement avec l'introduction d'une prime de risque.

Nous présenterons et justifierons d'abord la construction de ce modèle dynamique non linéaire à deux équations. Il s'agira ensuite de procéder à sa linéarisation et de définir précisément sous quelles conditions cette linéarisation est valide. Après avoir énoncé les critères de stabilité, nous tenterons de proposer une estimation économétrique des nouveaux paramètres introduits dans le but de mener des tests de soutenabilité alternatifs. Mais cependant nous ne sommes pas parvenus à produire une estimation robuste qui permette de tirer des conclusions de ces tests et par conséquent, *nous n'en présenterons les résultats que pour leur seul intérêt méthodologique.*

4.1 Soutenabilité de la dette publique en présence d'une prime de risque

Après avoir introduit la forme fonctionnelle que nous avons retenue pour représenter une prime de risque et analysé les conséquences sur l'état stable du système, nous procéderons à la linéarisation du système modifié que nous proposons d'étudier, en précisant les conditions de validité du théorème de linéarisation. Enfin, nous ferons l'analyse des propriétés dynamiques de ce système modifié et nous énoncerons des conditions de stabilité et de convergence, dont l'intuition et la démonstration sont identiques à celles du système initialement proposé par Collignon.

4.1.1 Introduction de la prime de risque et analyse de l'état stable du système

La substitution d'une fonction de prime de risque formalisant un lien entre le taux d'intérêt réel de long-terme et le niveau d'endettement, à l'expression du taux d'intérêt doit vérifier selon nous certaines propriétés. Au préalable, toute définition d'une prime de risque implique le choix d'un actif sans risque, la prime de risque se mesurant comme la différence entre le taux de l'actif risqué et le taux de l'actif sans risque. Pour traiter de la question de la soutenabilité des dettes publiques européennes, selon l'opinion générale, l'actif sans risque est le bond du trésor allemand. Aussi, par la suite, le taux $r^*(t)$ représentera le taux d'intérêt réel de long terme allemand. Par conséquent, l'analyse des conditions de soutenabilité en présence d'un prime de risque ne portera

pas sur le cas de l'Allemagne puisqu'elle n'y sera pas sujette, par définition : on se reportera alors pour le cas allemand aux tests de soutenabilité présentés à la section 3.

La première propriété que cette prime de risque doit vérifier selon nous est qu'elle doit dépendre de l'élasticité du taux d'intérêt réel de long-terme à la dette publique – ou du moins d'un *proxy* de cette élasticité. La seconde propriété découle du fait qu'une dette publique soutenable ne soit pas nécessairement stationnaire : en effet, dans l'idéal, cette prime de risque devrait dépendre de l'écart du niveau d'endettement effectif $d(t)$ par rapport à un niveau implicite $d^*(t)$ variable dans le temps qui représenterait le niveau d'endettement considéré comme soutenable par les principaux opérateurs du marché des obligations publiques. Cependant, ce niveau d'endettement est inconnu, et c'est pourquoi nous supposerons par la suite qu'il s'agit d'un ratio fixe d^* dans le temps mais spécifique à chaque pays, qu'il s'agirait d'identifier de manière implicite (par exemple, de la façon dont Collignon (2012) identifie implicitement z_1 ou z_2 en fonction de ses estimations de α et β).

Prime de risque et dette publique. Nous proposons donc la fonction de prime de risque suivante :

$$r(t) - r^*(t) = \gamma\big(d(t) - d^*\big) \tag{9}$$

où γ représente, nous allons le montrer ci-dessous, un *proxy* de l'élasticité du taux d'intérêt réel brut $R(t) = (1 + r(t))$ au niveau d'endettement ; par la suite on ne précisera plus que $r^*(t)$ dépend du temps et on notera r^* par simplicité. Cette prime de risque s'exprime, en taux bruts de la façon suivante :

$$\frac{R(t)}{R^*} = e^{\gamma\left(d(t)-d^*\right)}$$

De là, l'élasticité du taux d'intérêt réel brut au niveau d'endettement public s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e_{\mathrm{R/d}} &= \gamma\left(e^{\gamma\left(d(t)-d^*\right)}R^*\right)\left(e^{\gamma\left(d(t)-d^*\right)}R^*\right)^{-1} d(t) \\ e_{\mathrm{R/d}} &= \gamma d(t) \end{aligned}$$

Ainsi, il apparait que γ est bien un *proxy* pour l'élasticité du taux d'intérêt réel brut $R(t)$ à l'endettement public.

L'intuition économique derrière cette forme fonctionnelle est la suivante : γ est un paramètre spécifique à chaque pays qui détermine le niveau de cette élasticité ; cette élasticité est d'ailleurs une fonction croissante de l'endettement public, ce qui est une propriété intéressante pour une fonction de prime de risque.

D'autre part, et c'est un dernier argument pour justifier ce choix : il est essentiel de pouvoir exprimer cette relation de façon linéaire, afin de pouvoir en proposer une estimation par régression linéaire [14].

Présentation du modèle avec prime de risque. Notre modèle incorporant une prime de risque se construit en remplaçant le taux d'intérêt réel r par son expression en fonction de $d(t)$. Il

14. En effet, nous avions eu en tête, en premier lieu, de modéliser cette prime de risque de façon non linéaire, sous la forme

$$r(t)/r^* = \big(d(t)/d^*\big)^{\gamma}$$

où γ aurait été l'élasticité, constante, du taux d'intérêt réel net, ce qui aurait été d'ailleurs une hypothèse un peu moins intéressante pour le problème qui nous concerne. Mais la transformation en logarithme des séries de taux d'intérêt réels aurait été impossible, puisqu'ils peuvent être négatifs, rendant difficile d'estimer γ et d'identifier d^* par régression linéaire.

s'écrit désormais de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{d(t)} &= \big(r^* + \gamma(d(t) - d^*) - y\big)d(t) - s(t) \\ \dot{s(t)} &= \Big(\alpha\big(r^* + \gamma(d(t) - d^*) + \pi\big) + \beta\Big)d(t) - \alpha s(t) - z \end{cases} \tag{10}$$

Chacune de ces deux équations est donc désormais non linéaire, compte-tenu du terme $\gamma d(t)^2$ qui apparait. Cette non linéarité découlant de l'introduction d'une prime de risque traduit le fait que, plus un État s'endette, plus il devient coûteux pour lui d'accéder aux marchés financiers : en d'autres termes, plus il devient couteux pour lui d'accéder à la liquidité. Si l'on considère les difficultés des pays d'Europe du sud pour se financer sur les marchés obligataires depuis 2008, notamment celles de la Grèce, du Portugal, de l'Espagne ou de l'Italie, cette propriété de notre système modifié semble *a priori* plus pertinente, plus réaliste, sans pour autant le rendre beaucoup plus complexe.

Il en va de même lorsqu'on considère l'état stable du système modifié :

$$\begin{cases} \bar{d} &= \frac{z}{\alpha y + \pi) + \beta} \\ \bar{s} &= \gamma \bar{d}^{\,2} + \big(r^* - \gamma d^* - y\big)\bar{d} \end{cases} \tag{11}$$

L'expression de l'état stable de dette publique $\bar{d}$ est identique au modèle initial de Collignon, mais le surplus primaire stable est désormais une fonction non linéaire de $\bar{d}$, à l'inverse du modèle initial, où il était une fonction linéaire de $\bar{d}$ (voir équations 6).

4.1.2 Linéarisation du système, condition pour un point-fixe hyperbolique

Linéarisation du système. L'étude de ce système dynamique non linéaire consiste donc à étudier sa dynamique locale autour de son *point-fixe*. Pour étudier la stabilité de ce système autour de son unique point fixe $(\bar{d}, \bar{s})$, on linéarise par un développement de Taylor à l'ordre 1 chaque équation f et g définies comme suit :

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = f(d(t), s(t)) \\ \dot{s}(t) = g(d(t), s(t)) \end{cases}$$

Le point fixe du système est défini tel que :

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = f(\bar{d}, \bar{s}) = 0 \\ \dot{s}(t) = g(\bar{d}, \bar{s}) = 0 \end{cases}$$

Le système linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} f(d(t), s(t)) \simeq f(\bar{d}, \bar{s}) + \frac{\partial f}{\partial d}\big|_{(\bar{d},\bar{s})}\big(d(t) - \bar{d}\big) + \frac{\partial f}{\partial s}\big|_{(\bar{d},\bar{s})}\big(d(t) - \bar{d}\big) \\ \\ g(d(t), s(t)) \simeq g(\bar{d}, \bar{s}) + \frac{\partial g}{\partial d}\big|_{(\bar{d},\bar{s})}\big(s(t) - \bar{s}\big) + \frac{\partial g}{\partial s}\big|_{(\bar{d},\bar{s})}\big(s(t) - \bar{s}\big) \end{cases}$$

soit encore, en notant que $f(\bar{d}, \bar{s}) = 0$ et $g(\bar{d}, \bar{s}) = 0$:

$$\begin{pmatrix} \dot{d}(t) \\ \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d}\big|_{(\bar{d},\bar{s})} & \frac{\partial f}{\partial s}\big|_{(\bar{d},\bar{s})} \\ \\ \frac{\partial g}{\partial d}\big|_{(\bar{d},\bar{s})} & \frac{\partial g}{\partial s}\big|_{(\bar{d},\bar{s})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) - \bar{d} \\ \\ s(t) - \bar{s} \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne une expression de la matrice jacobienne évaluée autour du point fixe $(\bar{d}, \bar{s})$:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} r^* + \gamma(2\bar{d} - d^*) - y & -1 \\ \\ \alpha(r^* + \gamma(2\bar{d} - d^*) + \pi) + \beta & -\alpha \end{pmatrix} \tag{12}$$

Condition pour un point-fixe hyperbolique. D'après le théorème Hartman-Grobman, ou théorème de linéarisation, un système dynamique linéarisé autour de son point-fixe ne se comporte qualitativement de la même manière que le système non linéarisé qu'à la condition que toutes les valeurs propres de la jacobienne du système linéarisé évaluée autour de son (ses) point-fixe(s) soient toutes de partie réelle non-nulle ; cette condition est celle d'un point-fixe hyperbolique. Autrement dit, la linéarisation appliquée au système dynamique pour l'étude de sa stabilité locale n'est valide qu'à la condition que le point-fixe soit hyperbolique.

Cette condition se déduit immédiatement de l'expression (12) de la jacobienne J puisque la condition pour un point-fixe hyperbolique dépend de la trace de J de telle sorte que :

$$\mathrm{Trace}(J) \neq 0$$

Si l'on se rappelle que, dans le cadre de l'analyse de la soutenabilité de la dette publique à partir d'une fonction de réaction budgétaire tel que défini par Bohn (1998, 2005, 2007) et Collignon (2012), le cas $\alpha < 0$ décrit une politique budgétaire non soutenable, alors cette condition devient simplement :

$$\alpha > r^* + \gamma\big(2\bar{d} - d^*\big) - y \tag{13}$$

Par conséquent, le théorème de linéarisation implique de lui-même, par la condition de point-fixe hyperbolique qu'il requiert, une condition sur α, c'est-à-dire une condition de soutenabilité. Comme nous allons le voir maintenant, cette condition coïncide parfaitement avec les conditions de stabilité du système ; pour le dire autrement, l'analyse de la dynamique locale d'un système de deux équations différentielles non linéaires requiert que cette dynamique soit ou strictement stable (trace négative) ou strictement instable (trace positive) [15].

4.1.3 Étude des conditions de stabilité et critères de soutenabilité de la dette publique

L'étude des conditions de stabilité du système linéarisé est similaire en tout point à celle du système initial de Collignon. En effet, si l'on définit pour la suite de notre travail

$$r^{**} = r^* + \gamma(2\bar{d} - d^*)$$

on remarque immédiatement que la jacobienne du système linéarisé est exactement identique à la matrice décrivant le système (5). Aussi, nous nous rapporterons à la démonstration déjà effectuée pour les proposition de la section 3, annexe A. De même que pour le modèle initial, la démonstration va se focaliser sur les deux cas typiques déjà identifiés $\alpha > 0,\ \beta = 0$ et $\alpha = 0,\ \beta > 0$.

15. Le cas d'une trace nulle correspondant à un système dynamique ayant pour origine un "centre" ; le cas de trace positive (resp. négative) correspondent à un système ayant pour origine un foyer instable (resp. un foyer stable).

Réponse à une cible de dette. A l'instar du modèle précédent, la soutenabilité de la politique budgétaire ne peut être garantie par une seule condition sur β. Par ailleurs, la condition pour un point-fixe hyperbolique s'exprime désormais comme le fait d'être dans une situation de *stricte* inefficience dynamique. D'où la proposition suivante :

Proposition 4. Une politique budgétaire focalisée sur une cible de dette publique, c'est-à-dire vérifiant $\alpha = 0,\ \beta > 0$, n'est soutenable qu'aux conditions suivantes sur β, y et r^{**} :

$$\begin{cases} \beta & > & 0 \\ y & > & r^{**} \end{cases}$$

Réponse à une cible de déficit. Cette fois encore, on identifie deux conditions de soutenabilité, faible et forte, correspondant respectivement aux cas de deux valeurs propres complexes puis réelles.

Ces deux conditions sur α, que l'on appelle une fois de plus α_{min} et α_{crit}, sont telles que la politique budgétaire est faiblement soutenable si $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{crit}$ et fortement soutenable si $\alpha > \alpha_{crit}$.

Proposition 5. Sachant que $\alpha > 0$ et que $\beta = 0$, une condition suffisante sur α pour la soutenabilité faible de la politique budgétaire est :

$$\alpha > \alpha_{min} = \max\left(r^{**} - y, (\sqrt{r^{**} + \pi} - \sqrt{y + \pi})^2\right)$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} \alpha_{min} = r^{**} - y & \text{si} \quad r^{**} > y \\ \alpha_{min} = (\sqrt{r^{**} + \pi} - \sqrt{y + \pi})^2 & \text{si} \quad r^{**} < y \end{cases}$$

Notons toutefois que l'efficience ou l'inefficience dynamique se juge désormais d'après r^{**}, qui n'est pas le taux d'intérêt réel effectif, mais la somme du taux d'intérêt réel sans risque et d'un terme calculé d'après plusieurs estimations $\gamma\left(2\bar{d} - d^*\right)$. Par ailleurs, la condition garantissant que le point-fixe est hyperbolique est bel est bien vérifiée par α_{min}.

Proposition 6. Sachant que $\alpha > 0$ et que $\beta = 0$, une condition suffisante sur α pour la soutenabilité forte de la politique budgétaire est :

$$\alpha > \alpha_{crit} = (\sqrt{r^{**} + \pi} + \sqrt{y + \pi})^2$$

Ces propositions appellent deux commentaires particuliers.

D'une part, la condition pour un point-fixe hyperbolique, compte-tenu du seuil "estimé" $r^{**} - y$, implique que α soit significativement différent de ce seuil, mais en ne tenant pas seulement compte de l'écart-type estimé de $\hat{\alpha}$ mais également de l'écart-type estimé pour γ ; il faudrait également tenir compte des écarts-types estimés pour $\bar{d}$ et d^*, ce qui est difficile voire impossible dans la mesure où ces paramètres devraient être implicitement identifiés et non estimés : un compromis pourrait être de prendre en compte une marge d'erreur égale à deux fois l'écart-type estimé pour γ.

D'autre part, comme nous l'avancions au début de cette section, quand bien même ces seuils de soutenabilité sont similaires à ceux identifiés par Collignon, il faut bien noter que, dans notre système modifié, r^{**} n'est pas équivalent à r dans le système de Collignon. En effet, la spécification de la prime de risque donne

$$\left[r(t) = r^*(t) + \gamma\big(d(t) - d^*\big) \right] \neq \left[r^{**}(t) = r^*(t) + \gamma\big(2\bar{d} - d^*\big) \right]$$

ce qui montre bien que l'introduction d'une prime de risque modifie les caractéristiques dynamiques du système linéarisé par rapport au système linéaire de Collignon.

4.2 Estimation et tests empiriques

Nous proposons maintenant d'estimer le paramètre γ et d'identifier – dans la mesure du possible – la cible de dette d^*. Il faut reconnaître d'emblée que nous ne sommes pas parvenus à des résultats robustes. L'estimation d'une équation de prime de risque, qui plus est, spécifique à chaque pays, aurait probablement mérité que nous nous y consacrions exclusivement dans ce mémoire. Nous proposons quand même de présenter quelques résultats, à titre méthodologique et indicatif, et d'expliquer autant que possible leurs faiblesses.

Par ailleurs, la problématique du risque souverain est récente en Europe, depuis 2007 et les conséquences macroéconomiques de la crise des *subprimes* aux États-Unis. C'est pourquoi, plutôt que d'utiliser des données annuelles tirées de l'Ameco Database, nous avons choisi d'estimer notre équation de prime de risque sur données trimestrielles, pour la période récente (2005Q1-2012Q4).

Nous allons donc revenir un peu en détails sur notre stratégie d'estimation, sur les données utilisées et les variables introduites dans notre équation de prime de risque, avant d'en présenter les résultats et d'en discuter la validité. Malgré leur manque probable de robustesse, et l'incapacité à identifier, le plus souvent une cible de dette d^*, nous présenterons à titre méthodologique et indicatif le résultats des tests de soutenabilité, à partir des estimations obtenues pour γ et de valeurs arbitrairement choisies pour d^*.

4.2.1 Stratégie d'estimation

Modèles économétriques. Une première difficulté de l'estimation d'une fonction de prime de risque est le choix de la variable d'endettement public. Le problème, associé à l'usage des séries de dette publique, réside dans leur non stationnarité ; aussi, afin d'écarter le risque de régression fallacieuse, nous avons écarté l'idée d'intégrer la dette publique comme variable explicative. Nous avons préféré la remplacer par la variable de déficit public ; mais dès lors, l'identification de la cible d^* est compromise. Une idée aurait pu être de considérer la cible identifiée comme une cible implicite de déficit public def^*. Il aurait pu être possible ensuite de reconstruire une cible de dette d^* telle que

$$d^* = \frac{def^*}{y + \pi}$$

d'après les équations (1) et (2), considérées à l'état stationnaire, avec y le taux de croissance moyen du produit et π le taux moyen d'inflation. Cependant, nous y avons renoncé au regard des estimations obtenues et à défaut, nous fixerons arbitrairement la cible d^* à 60% d'après le SGP.

Nous avons ensuite retenu deux stratégies d'estimation. La première consiste à estimer simultanément l'équation suivante pour l'ensemble de nos 7 pays, par un modèle SUR :

$$\text{spread}_{it} = \gamma_0 + \gamma_1 \text{deficit}_{it} + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{14}$$

avec spread_{it} l'écart de taux réel long du pays i par rapport au taux réel long allemand, deficit_{it} le déficit public, x'_{it} un vecteur 2x2 de variables de contrôle, avec le taux d'inflation et le taux de croissance du produit en volume. Le recours à un modèle SUR se justifie alors par la prise en compte des relations instantanées entre chaque pays de l'échantillon.

La seconde stratégie revient à estimer une équation identique

$$\text{spread}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \widehat{\text{deficit}}_t + x'_t\beta + \varepsilon_t \tag{15}$$

mais à partir d'un estimateur des variables instrumentales (IV) par 2SLS (*Two Stage Least Squares*), et de manière séparée pour chaque pays. La variable explicative que l'on soupçonne d'être corrélée avec les autres régresseurs est la variable d'intérêt, le déficit public. Aussi, à l'instar de Baldacci and Kumar (2010), nous retenons comme instruments les valeurs retardées $(t-1, t-2, t-3)$ de déficit.

Notons dès à présent que ces modèles sont potentiellement mal spécifiés. Il aurait fallu en effet pouvoir intégrer d'autre variables telles le taux monétaire ou le rendement moyen d'autres actifs financiers (CDS sur les dettes publiques, par exemple). Cependant, la faible profondeur historique de notre échantillon nous dissuade d'intégrer d'autres variables. Nous faisons donc le choix de nous exposer au risque du biais de variables omises pour ne diminuer la puissance des tests de significativité.

Données. Les données utilisées pour l'estimation de l'équation de prime de risque proviennent essentiellement des bases de données trimestrielles d'Eurostat, pour les variables de déficit, d'inflation et de PIB en volume, tandis que les séries de taux réel long proviennent de la base de données mensuelles mise à disposition par la BCE sur son site internet. Les séries de taux réel long ont été trimestrialisées en calculant la moyenne des valeurs mensuelles. S'agissant des séries extraites de la base trimestrielle d'Eurostat, les séries de PIB en volume et d'inflation étaient corrigées des variations saisonnières. Concernant la série de déficit public, celle-ci n'étant pas ajustée des variations saisonnières, nous avons procédé à un lissage sur 4 trimestres par moyenne mobile ; par ailleurs la variable déficit prend une valeur positive pour une capacité de financement (surplus) et une valeur négative pour un besoin de financement (déficit). Aussi, à la lecture des résultats, il faudra tenir compte du fait que $-\gamma_1 = \gamma$ et que la constante estimée (que l'on identifie comme une cible de déficit implicite, dans l'équation de prime de risque estimée) s'identifie comme $-\gamma_0 = def^*$. On attend donc un signe positif pour γ_0 et un signe négatif pour γ_1.

4.2.2 Estimation d'une équation de prime de risque

Les résultats de nos estimations sont reportés à la table 5. Pour pour plus de clarté dans leur présentation nous nous contentons de reporter les estimations de la constante γ_0 et du paramètre γ_1.

Comment faut-il interpréter ces résultats ? Tout d'abord, étant-donné la profondeur historique des données qui nous a contraint dans notre choix de spécification, tout laisse à croire que ces résultats sont très faiblement robustes, à la fois compte-tenu d'un biais probable de variables omises, que d'une très probable autocorrélation des résidus. Aussi, les très faibles p-values obtenues pour certains pays sont sujettes à caution, et une analyse rapide de ces deux régressions ne devrait pas s'arrêter à ces tests de significativité probablement biaisés. Nous aurions pu peut-être élargir l'échantillon à tous les pays de la zone euro, mais cependant notre objectif est d'effectuer des tests sur α, et nous ne bénéficions d'estimations de ce paramètre que pour 7 pays à l'exception de l'Allemagne. Par ailleurs, peut-être que l'estimation d'une fonction de prime de risque, spécifique

TABLE 5 – Résultats d'estimation pour les équations de prime de risque (14) et (15)

Estimations SUR et IV-2SLS pour 7-pays, 2005Q1-2012Q4

	SUR			IV-2SLS		
Pays	γ_0	γ_1	F-stat	γ_0	γ_1	F-stat
France	0.002	– 0.048**	5.17	0.001	– 0.071*	7.01
	0.001	0.020	0.002	0.003	0.036	0.0014
Finlande	0.003***	– 0.020***	17.45	0.003***	– 0.025***	63.26
	0.0002	0.005	<0.000	0.0002	0.005	<0.000
Danemark	0.001***	– 0.007	1.48	0.001***	0.001	2.44
	0.0003	0.006	0.22	0.0003	0.009	0.088
Portugal	0.035***	0.057	3.15	0.037*	0.064	5.40
	0.011	0.161	0.026	0.020	0.269	0.005
Autriche	0.002*	–0.099***	8.14	–0.00004	–0.131***	12.96
	0.001	0.027	<0.000	0.001	0.032	<0.000
Belgique	0.005***	– 0.081**	4.11	0.002	– 0.201***	10.32
	0.001	0.029	0.0074	0.048	0.0014	<0.000
Pays-Bas	0.002***	– 0.028***	37.98	0.002***	– 0.028***	121.24
	0.0002	0.005	<0.000	0.0002	0.006	<0.000

Note : Les écarts-types estimés figurent en-dessous de leurs paramètres respectifs ; pour l'estimation par variables instrumentales, les écarts-types estimés sont calculés à partir de l'estimateur robuste de White. Les valeurs reportés sous les F-stats sont les p-values associées au test de Fisher. Lecture : un paramètre γ_1 négatif signifie qu'un déficit plus important accroit la prime de risque. Légende : *p-value < 10%, **p-value < 5%, ***p-value < 1%.

à chaque pays, est un objectif irréalisable, compte-tenu des données disponibles. Si l'on considère l'ensemble des articles et documents de travail qui proposent d'estimer des fonctions de prime de risque, tels que Baldacci and Kumar (2010), on remarquera que ces travaux recourent à des modèles de panel, et estiment par conséquent une fonction commune à tous les pays ; une approche équivalente dans notre cas reviendrait à présupposer que tous les pays Européens ont la même élasticité du taux d'intérêt à long terme par rapport à l'endettement public ce qui, semble-t-il, est complètement à l'opposé des expériences respectives que font les Européens "du nord" et "du sud" de la crise des dettes publiques.

Après toutes ces mises en garde, peut-être peut-on se risquer à commenter ces résultats, sachant leurs faiblesses. Tout d'abord, il apparait que les estimations obtenues pour le Danemark sont très nettement non significatives ; en effet, dans le cas du Danemark, la p-value associée au test de Fisher est égale à 22% pour l'estimation SUR et 8% pour l'estimation par IV-2SLS. Pour le Portugal, le test de Fisher ne conclut pas au rejet du modèle mais l'estimation du paramètre γ_1 est nettement non significative.

Une seconde remarque s'impose : l'estimation de l'équation de prime de risque (9) est partiellement décevante, puisque l'hypothèse d'un lien *positif* et *significatif* entre endettement publique et prime de risque sur le taux d'intérêt des obligations publiques ne se vérifie que pour les pays qui ont été jusqu'ici épargnés par la crise des dettes souveraines : on pouvait s'attendre à un résultat inverse ; cela dit, dans la mesure où seul le Portugal représente ces pays du sud dans notre panel, il faut relativiser la portée de ce résultat. En effet, dans notre échantillon de 7 pays pour lesquels nous disposons d'estimations viables de α, voir section 3, le lien endettement public–prime de risque est positif et significatif pour les d'Europe du nord tandis que pour le seul pays d'Europe du Sud (le Portugal) il est nettement non significatif. Malgré la faiblesse indéniable de nos estimations, ce résultat quelque peu surprenant pourrait signifier que la crise que traverse le Portugal avec l'explosion de son taux d'intérêt réel sur les obligations publiques, et que beaucoup qualifie comme

une crise des finances publiques, ne trouve pas son explication du côté des déficits publics mais plutôt du côté de la balance des paiements, du taux de change réel, etc. Cependant, nos résultats ne permettent en rien de l'affirmer, et nous ne faisons ici qu'une supposition.

Pourquoi avoir présenté ces résultats ? Nous avons choisi de les présenter à la fois pour une raison méthodologique mais également à titre indicatif, pour illustrer la méthode de test à laquelle aboutirait notre travail, si nous étions parvenus à des estimations robustes.

D'abord parce que du point de vue de la méthode, il est tout aussi important de présenter des résultats significatifs et robustes que de présenter des résultats empreints de doute et faiblement significatifs comme nous le faisons ici. Certes, nos deux modèles économétriques souffrent-ils probablement de biais de variables omises, d'autocorrélation des résidus ou encore de la faiblesse des échantillons utilisés, mais cependant, la faiblesse du lien endettement–prime de risque dans le cas du Portugal pourrait tout aussi bien venir du fait que la crise que ce pays traverse, avec d'autres pays d'Europe du sud, n'est pas une crise des dettes souveraines. Peut-être, au contraire, que la crise qui touche aujourd'hui ces pays n'est que le symptôme d'une crise de la balance des paiement des pays membres de la Zone euro et de la faible intégration économique et institutionnelle de l'Union Monétaire Européenne. Ce serait une explication au moins aussi plausible que celle qui met en avant un biais dépensier [16] commun à la Grèce, au Portugal et l'Italie ; la situation de l'Espagne et de l'Irlande étant différente, vus les excédents publics dégagés chaque année durant les années 2000.

Mais également à titre indicatif, il nous semblait important d'aller jusqu'au bout de la démarche proposée. Aussi, dans la section suivante, nous proposerons de construire et de mener ces tests, au prix de quelques hypothèses arbitraires, et sans jamais perdre de vue la faiblesse des estimations obtenues.

4.2.3 Tests de soutenabilité en présence d'une prime de risque

Compte-tenu des estimations obtenues à la table 2 et à la table 5, nous décidons d'exclure de nos tests :

- la Finlande, dans la mesure où la constante estimée dans l'équation (8) est nettement non significative et où elle ne permet pas de calculer un ratio stable de dette publique, dans le sens où Collignon le définit, voir section 3 ;
- le Danemark, dans la mesure où l'estimation obtenue pour $\hat{\gamma}$ est trop faiblement significative et que le test de Fisher aboutit à une p-value élevée ;
- pour la raison inverse, nous décidons d'intégrer le Portugal, même si $\hat{\gamma}$ est nettement non significatif, en raison d'une faible p-value associée au test de Fisher.

Le calcul des seuils de soutenabilité en présence d'une prime de risque est nettement plus complexe qu'avec le modèle initial de Collignon. Nous nous rapportons aux propositions 5 et 6 énoncées plus tôt pour leur calcul. En effet, pour chaque pays, le terme r^{**} est désormais constitué de trois paramètres connus (moyennes de y le taux de croissance du produit intérieur brut, π le taux d'inflation et r^* le taux d'intérêt réel sur le Bund allemand) mais également de trois paramètres estimés (γ l'élasticité du taux d'intérêt réel de long terme à l'endettement public) ou identifiés ($\bar{d}$ et d^*). Le calcul de ces paramètres implique nécessairement des choix arbitraires qui peuvent avoir

16. Qui eut été, d'ailleurs, favorisé par l'effondrement des primes de risque du début des années 2000, jusqu'en 2006-2007, dans un contexte où tout se passait sur les marchés obligataires comme si la Zone euro était une zone parfaitement intégrée et comme si le risque de défaut d'un pays tel que la Grèce était à peine plus élevé que celui de l'Allemagne.

TABLE 6 – Seuils de soutenabilité en présence de prime de risque

Pays	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma_\alpha}$	$\alpha_{min}^{\text{eff}}$	$\alpha_{min}^{\text{inef}}$	α_{min}	α_{crit}
Belgique	0.152	0.055	0.360	0.178	0.360	0.727
France	0.259	0.078	0.071	0.015	0.071	0.336
Portugal	0.678	0.140	0.128	0.025	0.128	0.643
Autriche	0.331	0.139	0.129	0.042	0.129	0.401
Pays-Bas	0.281	0.085	0.045	0.008	0.045	0.251

Note : les estimations $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma_\alpha}$ (écart-type estimé) reprises ici proviennent de la table 2. On rappelle que le seuil minimal α_{min} est le maximum de deux seuils qui sont appelés ici $\alpha_{min}^{\text{eff}}$ et $\alpha_{min}^{\text{inef}}$.

d'importantes conséquences sur les seuils de soutenabilité. Résumons les décisions que nous avons prises pour le calcul des seuils de soutenabilité en présence d'une prime de risque :

- les estimations de γ utilisées sont celles des estimations par variables instrumentales ;
- pour tenir compte de la contrainte associée au théorème de linéarisation employé plus tôt (condition pour un point-fixe hyperbolique), nous augmentons $\hat{\gamma}$ de deux fois son écart-type, c'est-à-dire que $r^{**} = r^* + (\hat{\gamma} + 2\hat{\sigma_\alpha})(2\bar{d} - d^*)$ comme nous l'avons déjà proposé plus tôt ; cela permet par ailleurs de tenir compte de la faible significativité du paramètre estimé pour le Portugal par exemple ;
- pour y, π et r^* nous avons choisi de calculer des moyennes sur la période 1978-2012 comme précédemment, pour ne pas surpondérer l'impact de la crise actuelle (faibles taux de croissance, d'inflation et taux d'intérêt réel sur le Bund allemand) sur les seuils de soutenabilité ;
- $\bar{d}$ est calculé comme une cible moyenne, à partir de la constante estimée pour l'équation (8) et de $y + \pi$ d'après le système (11) ;
- enfin, d^* n'a pas pu être identifié d'après les constantes obtenues à la table 5 (les ratios implicites obtenus étant trop souvent invraisemblables, par exemple largement supérieur à 80-100%), et nous avons donc choisi de le fixer par défaut à 60% pour tous les pays, considérant que le critère SGP est probablement une référence pour les opérateurs du marché obligataire européen.

La décision d'augmenter γ de deux fois sont écart-type est certainement le choix portant le plus à conséquence sur le résultat de nos tests ; mais cependant, compte-tenu du doute qui pèse sur nos estimations et du fait que la condition de la validité du théorème de linéarisation (*i.e.* point-fixe hyperbolique) implique de tenir compte d'une marge d'erreur dans "l'estimation" de r^{**}, ce choix n'est peut-être pas un si mauvais compromis. Toujours est-il que les seuils présentés à la table 6 sont nettement plus élevés que ceux calculés plus tôt (voir table 4).

Les résultats de cette seconde batterie de tests, même s'ils sont sujets à caution, montrent que la prise en compte d'une prime de risque durcit nettement les conditions sur α pour garantir la soutenabilité de la politique budgétaire et de la dette publique. Par exemple, si tous les pays satisfont la condition de soutenabilité faible avec une p-value inférieure à 5%, l'Autriche ne la vérifie qu'avec une p-value inférieure à 10%, et l'hypothèse de soutenabilité de la dette publique belge est rejetée. Et si l'on considère le résultat des tests de soutenabilité forte, ceux-ci montrent que plus aucun pays ne la satisfait.

Bien entendu, ces résultats ne seraient probants que si nous avions pu tester la robustesse de nos estimations de la fonction de prime de risque, notamment concernant l'autocorrélation des résidus, ce qui permettrait de tester la spécification de notre modèle et d'y intégrer de nombreuses variables de contrôle en cas d'autocorrélation. Une critique pertinente pourrait être adressée à nos

TABLE 7 – Tests de soutenabilité en présence d'une prime de risque

	Soutenabilité faible		Soutenabilité forte	
Pays	t-stat	p-value	t-stat	p-value
Belgique	-2.4488	0.9901	-6.7643	p>0.999
France	2.4078	0.0109	-0.9874	0.8347
Portugal	3.9311	0.0002	0.2483	0.4027
Autriche	1.4517	0.0780	-0.5027	0.6907
Pays-Bas	2.7776	0.0045	0.3545	0.3626

Note : les tests de Student présentés ici sont réalisés à partir des estimations de α obtenues pour l'équation (8), table 2. Lecture : pour une p-value (probabilité de l'erreur de première espèce) supérieure à 5% on considère ne pas pouvoir rejeter avec un niveau de confiance suffisamment élevé l'hypothèse nulle (H0 : "non soutenabilité de la dette publique").

estimations par la méthode des variables instrumentales porte sur le choix des instruments retenus pour le déficit public (variable de *fiscal balance*) : une approche qui tiendrait comptes des anticipations rationnelles suggéreraient d'utiliser non seulement des valeurs retardées du déficit mais pourquoi pas également des valeurs avancées, pour tenir compte des anticipations de déficits futurs. L'estimateur des GMM (Méthode des Moments Généralisés), initialement conçu pour l'estimation de modèles à anticipations rationnelles, serait alors utilisé. Ces quelques pistes vaudraient pour un travail futur, empirique, visant à obtenir des estimations nettement plus robustes pour l'équation de prime de risque – mais également pour l'équation de réaction budgétaire.

5 Extension. Soutenabilité de la dette publique, règles budgétaires et dynamique des taux d'intérêt

La modification apportée au modèle initial de Collignon n'est qu'une façon particulière de prendre en compte la présence d'une prime de risque. A la section précédente, nous avons fait le choix de substituer une fonction de prime de risque, liée à l'endettement public, au taux d'intérêt réel de long terme. Cette substitution est peut-être une stratégie sous-optimale, dans la mesure où elle vise à "endogénéiser" le comportement d'une variable (qui n'était jusqu'alors qu'un paramètre exogène), sans toutefois l'intégrer parmi les variables endogènes du système.

Nous proposons donc une extension à la démarche précédente en proposant désormais d'étudier un système dynamique en dimension trois, intégrant aux deux précédentes équations différentielles – l'équation d'accumulation de la dette publique (ou de contrainte budgétaire instantanée) et la fonction de réaction budgétaire – une nouvelle équation différentielle du type ECM (*Error Correction Model*) qui représente la dynamique des taux d'intérêts réels, c'est-à-dire la réaction des marchés obligataires.

Cette section n'a cependant qu'un objectif théorique – celui de proposer des critères de soutenabilité alternatifs à ceux inspirés de Collignon (2012) – et nous n'avons envisagé d'estimer aucune des fonctions de réactions proposées pour la dynamique des taux d'intérêt réels sur les obligations publiques. Nous allons proposer deux versions de ce modèle en dimension trois, selon deux spécifications légèrement différentes de la fonction de réaction des marchés obligataires. Mais en premier lieu, nous allons présenter la structure de ce modèle dynamique non linéaire à trois équations ainsi que les conditions de validité de sa linéarisation et les conditions de stabilité qui y sont associées.

5.1 Forme générale du modèle, linéarisation et conditions de stabilité.

5.1.1 Forme générale.

On fait le choix de conserver la structure initiale du modèle de Collignon, c'est-à-dire l'équation d'accumulation de la dette publique qui représente la contrainte budgétaire instantanée, mais également la fonction de réaction budgétaire, exprimée comme la réponse (*i.e.* variation à la période suivante) du surplus primaire à une cible de dette et une cible de déficit, que l'on exprime en fonction du solde primaire et de la dette, voir (2). Les deux premières équations du modèle sont donc identiques au système initial de Collignon (5) :

$$\begin{aligned} \dot{d(t)} &= \Big(r(t) - y\Big)d(t) - s(t) \\ \dot{s(t)} &= \Big(\alpha(r(t) + \pi) + \beta\Big)d(t) - \alpha s(t) - z \end{aligned}$$

Reste alors à intégrer une équation différentielle représentant la réponse dynamique des marchés financiers à la dynamique de la dette publique. Notons ici la différence avec la précédente stratégie (section 4), puisqu'il s'agissait précédemment de spécifier une réponse statique du taux d'intérêt réel à l'endettement public alors qu'il s'agit désormais de modéliser une réponse dynamique des taux réels sur les obligations publiques.

Dans l'objectif de modélisation d'une fonction de réponse des marchés financiers à l'endettement public, nous proposons de décrire cette fonction telle que :

$$\dot{r(t)} = h(d(t), s(t), r(t), t) \tag{16}$$

avec $h(.)$ une fonction du type ECM telle que la variation des taux d'intérêt s'accroît avec une augmentation du niveau d'endettement $d(t)$ et/ou une dégradation de la balance publique primaire $s(t)$; nous proposons également de modéliser cette fonction $h(.)$ telle que plus les taux d'intérêts s'éloignent d'une certaine cible r^* qu'il resterait à définir, mais on pourrait proposer comme taux de référence le taux sur les obligations allemandes, ou encore le taux d'intérêt réel à court terme, etc.

Le modèle s'écrit finalement de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{d(t)} = \Big(r(t) - y\Big)d(t) - s(t) \\ \dot{s(t)} = \Big(\alpha(r(t) + \pi) + \beta\Big)d(t) - \alpha s(t) - z \\ \dot{r(t)} = h\Big(d(t), s(t), r(t), t\Big) \end{cases} \tag{17}$$

Et ce système, selon la forme fonctionnelle retenue pour $h(.)$, admet un (ou plusieurs) point-fixe(s) tel(s) que :

$$\begin{cases} \Big(\bar{r} - y\Big)\bar{d} - \bar{s} & = 0 \\ \Big(\alpha(\bar{r} + \pi) + \beta\Big)\bar{d} - \alpha\bar{s} - z & = 0 \\ h\Big(\bar{d}, \bar{s}, \bar{r}\Big) & = 0 \end{cases} \tag{18}$$

5.1.2 Linéarisation.

Comme précédemment, ce modèle est non linéaire, compte-tenu du terme $r(t)d(t)$ présent dans les deux premières équations différentielles, et potentiellement dans la troisième équation – ceci dépendant de la spécification retenue pour $h(.)$. Il s'agit donc de le linéariser selon un développement de Taylor à l'ordre 1 autour de son état stationnaire. La technique est similaire à celle décrite en détails à la section précédente, aussi nous nous contentons de rapporter l'expression de la jacobienne J du système linéarisé, évaluée autour de son point-fixe. Sous sa forme générale, J s'exprime de la manière suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \bar{r} - y & -1 & \bar{d} \\ \alpha\big(\bar{r} + \pi\big) + \beta & -\alpha & \alpha\bar{d} \\ \frac{\partial h}{\partial d}\Big|_{(\bar{d},\bar{s},\bar{r})} & \frac{\partial h}{\partial s}\Big|_{(\bar{d},\bar{s},\bar{r})} & \frac{\partial h}{\partial r}\Big|_{(\bar{d},\bar{s},\bar{r})} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Cette linéarisation n'est valide, là encore, qu'à la condition que le point-fixe que l'on considère soit hyperbolique, soit autrement dit que chaque valeur propre soit de partie strictement négative ou strictement positive. L'analyse des conditions de stabilité revenant à identifier les conditions pour lesquelles les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative, et on admettra par la suite que ces conditions de stabilité sur les paramètres de la jacobienne coïncident avec la condition garantissant que le point-fixe est hyperbolique.

5.1.3 Conditions de stabilité.

L'étude des conditions de stabilité d'un système dynamique en dimension trois diffère cette fois-ci du modèle initial de Collignon. Nous rappelons brièvement, dans l'annexe A.2, comment sont identifiées ces conditions de stabilité, d'après les conditions de Routh-Hurwitz pour un polynôme de degré trois. Ces conditions de stabilité sur les paramètres de la jacobienne seront analysés là encore comme des critères de soutenabilité de la politique budgétaire, selon les deux cas de cible

de dette publique et de cible de déficit publique ; cette fois-ci s'ajoutera également une condition sur le (ou les) paramètres de la fonction de réaction des marchés financiers.

Ce système dynamique à trois variables est stable si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{trace}(J) & < & 0 \\ \text{trace}(J^2) - (\text{trace}(J))^2 & < & 0 \\ \det(J) & < & 0 \end{cases} \tag{20}$$

d'après les conditions de Routh-Hurwitz sur les coefficients du polynôme caractéristique de J.

5.2 Exemples de spécification pour la fonction de dynamique des taux d'intérêts

Nous présentons ici des résultats à titre indicatif pour deux spécifications alternatives de la fonction $h(.)$. Cette piste de recherche devraient probablement être approfondie dans de futurs travaux. Les spécifications retenues sont censées modéliser de façons alternatives les effets d'une prime de risque liée à l'endettement public, en fonction du ratio d'endettement public (modèle 1) et du niveau de déficit (modèle 2). Bien évidemment, d'autres spécifications pourraient être envisagées...

5.2.1 Modèle 1 : réponse au niveau du ratio d'endettement public

Dans ce premier modèle la spécification retenue pour $h(.)$ est la suivante :

$$\dot{r(t)} = \eta\big(d(t) - d^*\big) + (1-\eta)\big(r(t) - r^*\big) \tag{21}$$

où d^* représenterait la cible implicite de dette publique sous-jacente à la relation (21) tandis que r^* pourrait être identifié comme le taux d'intérêt réel de long terme de l'obligation publique considérée comme sans risque (le Bund allemand) ou comme le taux d'intérêt réel de court terme.

Le système obtenu serait alors de la forme :

$$\begin{cases} \dot{d(t)} & = \Big(r(t) - y\Big)d(t) - s(t) \\ \dot{s(t)} & = \Big(\alpha(r(t)+\pi) + \beta\Big)d(t) - \alpha s(t) - z \\ \dot{r(t)} & = \eta\Big(d(t) - d^*\Big) + (1-\eta)\Big(r(t) - r^*\Big) \end{cases}$$

avec un état stable ou point-fixe tel que :

$$\begin{cases} \bar{s} & = \Big(\bar{r} - y\Big)\bar{d} \\ \bar{d} & = \frac{z}{\alpha(y+\pi)+\beta} \\ \bar{r} & = r^* + \frac{\eta}{\eta-1}\big(\bar{d} - d^*\big) \end{cases}$$

Concernant l'analyse du point-fixe pour $\bar{r}$, on peut déjà remarquer que l'état stable n'implique une prime de risque sur la dette publique qu'à la condition que

$$\frac{\eta}{\eta-1}\big(\bar{d} - d^*\big) > 0$$

ce qui implique, si l'on considère le cas le plus probable où $\bar{d} > d^*$, que l'équation de réaction des marchés financiers soit caractérisée par une réaction positive et supérieure à 1 à l'écart $d(t) - d^*$

ainsi que par une force de rappel lorsque le taux d'intérêt réel de long terme $r(t)$ s'éloigne de son niveau cible r^*, soit la condition :

$$\eta > 1$$

Cette condition que l'on peut dès lors identifier comme une condition de stabilité de la réaction des marchés financiers est alors essentielle à la stabilité du modèle dans son ensemble ; cette intuition sera confirmée lors de l'analyse des conditions de stabilité et de convergence du système.

Dans la mesure où nous nous intéressons aux conditions, sur les paramètres α et β de la fonction de réaction budgétaire, pour lesquelles le système proposé est stable et converge vers son état stationnaire, nous considérons là encore les deux cas typiques de la politique budgétaire, à savoir :

- une politique budgétaire caractérisée par une cible de dette publique : $\beta > 0$ et $\alpha = 0$;
- une politique budgétaire caractérisée par une cible de déficit public : $\alpha > 0$ et $\beta = 0$;

Cible de dette publique. Contrairement au modèle proposé par Collignon ainsi qu'au notre, l'introduction d'une troisième fonction dynamique permet de définir un seuil pour β au dessus duquel la politique budgétaire est soutenable ; mais cette fois-ci, la stabilité du système dépend également du paramètre η de réponse des marchés financiers à l'endettement public. En effet, le modèle est stable si et seulement si :

$$\begin{cases} \eta > \max(1; 1 + \bar{r} - y) \\ \beta > \eta\bar{d} + (\eta - 1)(\bar{r} - y) = \beta_{min} \end{cases}$$

la condition sur η dépendant de manière critique de la différence $\bar{r} - y$; si l'état stable correspond à une situation d'inefficience dynamique, alors la condition est $\eta > 1$ sinon, en cas d'efficience dynamique à l'état stable, la condition est $\eta > 1 + \bar{r} - y$.

Ce modèle à le mérite de montrer que l'introduction d'une équation dynamique pour le taux d'intérêt réel permet de définir un seuil β_{min} tel qu'une politique budgétaire uniquement fondée sur une cible de dette publique est soutenable ; on remarque que ce seuil vérifie bien l'intuition de l'effet d'une prime de risque liée à l'endettement public, puisqu'il est fonction croissante de $\bar{d}$ et de $\bar{r}$. Cependant, si l'équation de réaction des marchés financier est "instable", c'est-à-dire s'il n'y a pas de force de rappel relative à l'écart $r(t) - r^*$, alors aucune règle budgétaire portant sur β ne permet de garantir la soutenabilité ; nous reviendrons sur ce point précis en conclusion de cette section.

Cible de déficit public Concentrons-nous désormais sur le cas d'une politique budgétaire uniquement caractérisée par une cible de déficit public. Les conditions de soutenabilité sur η et α sont désormais telles que :

$$\begin{cases} \eta > 1 \\ \alpha > \max\left((\bar{r} - y) - (\eta - 1); \frac{\eta\bar{d} + (\eta-1)(\bar{r}-y)}{y+\pi+\eta-1}\right) = \alpha_{min} \end{cases}$$

La seconde condition sur α dépend là encore, de façon cruciale, de la différence $\bar{r} - y$ puisqu'on peut montrer qu'elle s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \alpha > (\bar{r} - y) - (\eta - 1) & \text{si} \quad \bar{r} - y > \frac{\eta\bar{d} + (\eta-1)^2}{y+\pi} \\ \alpha > \frac{\eta\bar{d} + (\eta-1)(\bar{r}-y)}{y+\pi+\eta-1} & \text{si} \quad \bar{r} - y < \frac{\eta\bar{d} + (\eta-1)^2}{y+\pi} \end{cases}$$

Là encore, on remarque que la stabilité globale du système n'est garantie qu'à la condition nécessaire mais non suffisante de stabilité (*i.e.* présence d'une force de rappel) de la fonction de réaction des marchés financiers. Cependant, la stabilité du système dépend dans une moindre mesure de cette condition sur η que dans le cas précédent d'une politique budgétaire fondée sur une cible de dette publique, puisque η ne doit vérifier que la condition $\eta > 1$. Le paramètre α a une portée relativement plus longue en comparaison de β dans le cas précédent, puisqu'une politique budgétaire fondée sur une cible de déficit public est plus à même, en terme de capacité de contrôle de la dynamique de la dette publique, d'assurer la soutenabilité. Nous tirons cette conclusion du fait que pour une cible de dette, le seuil pour η soit le maximum de deux valeurs tandis que ce n'est plus le cas pour une cible de déficit.

En quelque sorte, on retrouve de manière plus nuancée le constat effectué lors de l'analyse du système à deux équations : cette fois-ci la politique de cible de dette n'est pas complètement dominée par le contexte économique (la différence $\bar{r} - y$) mais elle est toutefois moins "efficace" pour contrôler la dynamique de la dette publique et assurer la soutenabilité que la politique fondée sur une cible de déficit.

Cette spécification nous semble vraiment intéressante d'un point de vue théorique. Cependant, même si nous n'avons pas estimé une fonction de réaction des marchés obligataires, nous pouvons tout de même souligner un écueil empirique : la présence de la variable de dette publique. En effet, l'estimation de cette fonction de réaction poserait mécaniquement les mêmes difficultés que celles mentionnées plus tôt, en termes de non stationnarité des séries de dette publique.

5.2.2 Modèle 2 : réponse au niveau de déficit public

Dans ce second modèle la spécification retenue pour $h(.)$ modélise cette-fois une réponse des marchés financiers au niveau de déficit public :

$$\dot{r(t)} = \eta def(t) + (1-\eta)\big(r(t) - r^*\big) \tag{22}$$

où r^* pourrait être identifié comme le taux d'intérêt réel de long terme de l'obligation publique considérée comme sans risque (le Bund allemand) ou comme le taux d'intérêt réel de court terme. On rappelle que le déficit s'exprime en fonction de la dette comme :

$$def(t) = \Big(r(t) + \pi\Big)d(t) - s(t)$$

Le système obtenu serait alors de la forme :

$$\begin{cases} \dot{d(t)} &= \Big(r(t) - y\Big)d(t) - s(t) \\ \dot{s(t)} &= \Big(\alpha(r(t) + \pi) + \beta\Big)d(t) - \alpha s(t) - z \\ \dot{r(t)} &= \eta\Big(r(t) + \pi\Big)d(t) - \eta s(t) + (1-\eta)\Big(r(t) - r^*\Big) \end{cases}$$

avec un état stable ou point-fixe tel que :

$$\begin{cases} \bar{s} &= \Big(\bar{r} - y\Big)\bar{d} \\ \bar{d} &= \frac{z}{\alpha(y+\pi)+\beta} \\ \bar{r} &= r^* + \frac{\eta}{\eta-1}\big(y + \pi\big)\bar{d} \quad = \quad r^* + \frac{\eta}{\eta-1}\bar{def} \end{cases}$$

Concernant l'analyse du point-fixe pour $\bar{r}$, on remarque encore une fois que l'état stable n'implique une prime de risque sur la dette publique qu'à la condition que

$$\frac{\eta}{\eta - 1} \bar{def} > 0$$

ce qui implique, si l'on considère le cas où $\bar{def} > 0$, que l'équation de réaction des marchés financiers soit caractérisée par une réaction positive et supérieure à un au déficit public $def(t)$ ainsi que par une force de rappel lorsque le taux d'intérêt réel de long terme $r(t)$ s'éloigne de son niveau cible r^*, soit la condition :

$$\eta > 1$$

que l'on avait déjà identifiée pour la première spécification.

Cible de dette publique. L'introduction d'une troisième fonction dynamique permet, là encore, de définir un seuil pour β au dessus duquel la politique budgétaire est soutenable, même si la stabilité du système dépend crucialement de la valeur du paramètre η de réponse des marchés financiers à l'endettement public. En effet, le modèle est stable si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \eta & > & \max\left(1; \frac{1+\bar{r}-y}{1-\bar{d}}\right) \\ \beta & > & \eta\bar{d}(y+\pi) + (\eta-1)(\bar{r}-y) = \beta_{min} \end{array} \right.$$

On peut difficilement comparer ces conditions de stabilité à celles identifiées pour le modèle précédemment, dans la mesure où le paramètre η identifie deux réactions différentes, l'une au niveau de dette publique, l'autre au niveau de déficit. Il faut noter que, là encore, c'est η qui est un paramètre crucial, puisqu'il est le maximum de deux seuils : on remarquera d'ailleurs qu'à $\bar{r} - y$ fixé, un accroissement du niveau (stable) d'endettement public augmente le seuil $(1+\bar{r}-y)(1-\bar{d})^{-1}$ de telle sorte qu'il existe un $\bar{d}_{crit}$ tel que la condition sur η se durcit avec le niveau de dette à l'état stable. Enfin, ces conditions sont bien cohérentes avec l'hypothèse d'une prime de risque, puisque la condition β_{min} est une fonction croissante de $\bar{r}$ et de $\bar{d}$.

Cible de déficit public Dans le cas d'une politique budgétaire uniquement caractérisée par une cible de déficit public, les conditions de soutenabilité sur η et α sont désormais telles que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \eta & > & 1 \\ \alpha & > & \max\left((1 + (\bar{r}-y) - \eta(1-\bar{d}); \frac{\eta\bar{d}(\pi+y)+(\eta-1)(\bar{r}-y)}{y+\pi+\eta-1}\right) = \alpha_{min} \end{array} \right.$$

On retrouve toujours les mêmes propriétés :

- $\eta > 1$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour la stabilité du système, ce qui traduit le fait que la soutenabilité dépend assez largement de la stabilité de la réaction des marchés financiers ;
- en comparaison avec les conditions énoncées pour β, il apparait qu'une politique budgétaire fondée sur une cible de déficit est légèrement moins dépendante de la condition sur η.

5.3 Discussion

5.3.1 A propos de la spécification des fonctions de réactions des marchés financiers.

Ces deux modèles ont été spécifiés d'une façon assez particulière puisque l'équation dynamique que l'on a ajoutée pour représenter la réponse des marchés obligataires suppose que la somme des coeffcients de réponse soit égale à un. Cette hypothèse n'a aucune justification théorique *a priori* mais elle a certainement le mérite de simplifier les calculs. Toujours est-il qu'il faudrait probablement spécifier ces coefficients de telle façon qu'ils soient *a priori* indépendants, c'est-à-dire :

$$\Delta r_r = \alpha_0 + \alpha_1 d_{t-1} + \alpha_2 \text{spread}_{t-1} + \varepsilon_t$$

dans le cas du modèle 1 ; ou sinon, dans le cas du modèle 2 :

$$\Delta r_r = \alpha_0 + \alpha_1 def_{t-1} + \alpha_2 \text{spread}_{t-1} + \varepsilon_t$$

On attendrait dans chaque cas que le paramètre α_1 soit positif et que le paramètre α_2 soit négatif ; et il serait toujours possible de tester l'hypothèse selon laquelle la somme de ces coefficients estimés est égale à 1, par un test de Fisher.

5.3.2 Stabilité de la dynamique des taux d'intérêt et soutenabilité de la dette publique

Ces deux modèles ont un intérêt certain dans la mesure où, décrivant une dynamique plus complexe, ils permettent de distinguer de façon synthétique ce qui relève de l'instabilité de la réaction des marchés financiers et ce qui relève du manque de rigueur budgétaire dans la procédure de test de l'hypothèse de soutenabilité : autrement dit, ces résultats semblent proposer un critère de distinction entre une crise de liquidité et une crise de soutenabilité [17] pour un gouvernement. En effet, la dynamique des taux d'intérêt doit inclure une force de rappel : concrètement, s'il existe un taux qui correspond à une valeur fondamentale r^*, alors la soutenabilité de la dette publique n'est possible qu'à la condition que la dynamique des taux d'intérêt ne soit pas explosive et auto-entrenue, autrement dit la politique budgétaire ne peut être soutenable qu'à la condition qu'il n'y ait pas de mouvements procycliques (qui pourraient s'expliquer par des comportements moutonniers de la part des opérateurs du marché obligataire, c'est-à-dire des anticipations auto-réalisatrices).

Quand bien même la politique budgétaire vérifie la condition sur β_{min} ou sur α_{min}, la soutenabilité ne peut être garantie si la dynamique des taux d'intérêt est instable. Il s'agit certes d'une idée très simple, mais elle a le mérite d'être formalisée. Muni d'estimations robustes de cette fonction de réaction des marchés financiers, l'on pourrait peut-être donner une réponse à la question : la Grèce (ou l'Espagne, le Portugal, l'Irlande, etc) est-elle sur une trajectoire des finances publiques non soutenable à cause de son manque de rigueur budgétaire, ou bien à cause de l'instabilité des marchés financiers ? Si ces résultats étaient probants, ils constitueraient par conséquent un argument en faveur d'une intervention *temporaire* de la Banque centrale sur les marchés obligataires, si leur instabilité est manifestement la cause d'une crise de la dette publique, pour mettre fin à la dynamique explosive des taux d'intérêt et rétablir un climat de confiance.

17. On préfère ici le terme de soutenabilité à celui de solvabilité, car une administration publique n'est pas "solvable" au sens où peut l'être une banque ; les administrations publiques n'ont pas un bilan mais un compte de patrimoine et elles ne sont généralement pas en mesure (pour des raisons juridiques) de liquider, si besoin est, une grande partie de leur patrimoine, afin de rembourser ses dettes

6 Conclusions

Le projet de recherche initié par Bohn (1998, 2005, 2007) et poursuivi par Collignon (2012), dont nous nous sommes inspirés pour notre mémoire de recherche, conduit à proposer des critères alternatifs à ceux déjà existants, même s'ils se rejoignent tous dans l'idée que la dette publique initiale doit être tôt ou tard compensée par des excédents budgétaires primaires ; toute la question de la soutenabilité se concentre en réalité dans "le tôt ou tard" : quid de la rapidité de l'ajustement ? Force est de constater que les trois suggestions que nous avions identifiées (le calcul de *tax gaps* à la Blanchard et al. (1991), les tests de cointégration recettes–dépenses (Afonso, 2005, par exemple) ou l'étude de fonctions de réaction budgétaire) apportent des réponses alternatives à cette question. Quel est alors l'intérêt spécifique de l'analyse de la soutenabilité à partir d'une fonction de réaction budgétaire, voire d'une fonction de réaction des marchés financiers à l'endettement public ?

Cible de dette versus cible de déficit ? L'étude de ces différents modèles, qui sont reconnaissons-le bien peu sophistiqués, nous a conduit malgré tout à quelques résultats théoriques intéressants. Nous pensons en effet avoir mis en lumière quelques éléments de réponse aux questions qui ont été posées, et continuent d'ailleurs de l'être, à propos de la définition de "bonnes" règles budgétaires, notamment en matière de soutenabilité de la dette publique. Aussi, la correction apportée aux propositions de Stefan Collignon (2012) ainsi que les conditions définies aux sections 4 et 5 montrent dans l'ensemble qu'une règle politique budgétaire décrite par la variation du solde primaire et uniquement focalisée sur une cible de dette publique est moins à même de garantir la soutenabilité de la dette publique qu'une règle définie par une cible de déficit public.

En effet, dans le modèle initial comme dans notre modèle à deux équations incorporant une prime de risque, aucune condition β_{min} ne permet de garantir la soutenabilité à elle-seule, tandis que la condition α_{min} la garantit. Dans les modèles à trois équations présentés en dernière section, dans tous les cas, la politique budgétaire dépend d'une condition exogène sur la réaction des marchés financiers et la dynamique des taux d'intérêt : de ce point de vue, il n'y a pas de conditions sur α ou β telles que la politique budgétaire garantisse à coup sûr la soutenabilité de la dette publique. Cependant, les conditions de soutenabilité sont moins dépendantes de η dans le cas d'une cible de déficit par rapport aux conditions de soutenabilité dans le cas d'une cible de dette comme nous l'avons expliqué à la fin de la section 5.

Nous interprétons ce résultat comme une preuve que la soutenabilité de la politique budgétaire, dans le cadre de la fonction de réaction proposée par Collignon (2012), dépend crucialement de son horizon temporel. Si l'on interprète la cible de dette publique comme une règle de long-terme et la cible de déficit public comme une règle de court-terme, alors nous pensons avoir démontré que la soutenabilité de la dette publique est plus difficilement garantie lorsque la politique budgétaire suit une règle de long terme qu'une règle de court terme (c'est marginalement vrai pour le modèle en dimension 3 que nous avons présenté à la section 5). Ce point apporte une réponse directe à la question fondamentale de la vitesse d'ajustement du solde budgétaire primaire qui nécessaire pour satisfaire la contrainte budgétaire intertemporelle des finances publiques.

Dynamique des taux d'intérêt et soutenabilité de la politique budgétaire. Par ailleurs, les modèles à trois équations que nous avons présentés à titre d'exemple nous permettent de proposer un critère de distinction entre crise de liquidité et crise de solvabilité, en plus de définir des critères de soutenabilité de la dette publique, suivant la politique budgétaire suivie. En effet, en

différenciant clairement ce qui relève de la politique budgétaire [18] et ce qui relève de la dynamique des taux d'intérêts, c'est-à-dire de l'instabilité ou de la stabilité des anticipations et du comportement des opérateurs des marchés obligataires, ces modèles permettent, *in fine* de distinguer entre une crise de liquidité (c'est-à-dire une crise de confiance sur les marchés financiers, qui provoque une hausse auto-entretenue des taux sur les obligations publiques et des difficultés pour les gouvernements concernés à se financer sur les marchés) et une crise de soutenabilité (c'est-à-dire une crise des finances publiques caratérisée par un déficit structurel et une dette explosive).

Ce genre de modèle décrit, nous semble-t-il de façon satisfaisante, un cadre théorique dans lequel toute crise de la dette publique n'est pas nécessairement et exclusivement liée à une politique budgétaire "irresponsable" pas plus qu'elle n'est nécessairement et uniquement expliquée par des comportements spéculatifs, et la dynamique explosive des taux d'intérêt qui en est la conséquence, sur les marchés obligataires. Il permettrait, dans l'hypothèse où l'on disposerait d'estimations robustes [19], d'apporter une réponse claire, sans être définitive, à la question de savoir si, par exemple, la Grèce a été frappée par la crise de la dette parce que sa politique budgétaire était insoutenable, ou bien à cause de comportements déstabilisateurs sur les marchés obligataires...

De la difficulté d'estimer une fonction de prime de risque. Ce mémoire s'est cependant heurté à de nettes difficultés empiriques, dans la mesure où l'estimation d'une relation entre dettes ou déficit (comme *proxy* de l'endettement public) et spread sur les taux d'intérêt souverains est épineuse. Une première raison tient aux caractéristiques et la quantité des données utilisées et à la spécification du modèle. La faiblesse de notre échantillon, en terme de profondeur historique, et dans la mesure où nous avons choisi d'estimer une équation de prime de risque spécifique à chaque pays, nous a contraint à restreindre le nombre de variables de contrôle introduites dans notre modèle. Il fallait ainsi choisir entre la réduction du biais de variables omises (mauvaise spécification du modèle) et le nombre de degrés de liberté pout nos estimations.

Assurément, l'estimation rigoureuse d'une fonction de prime de risque ou d'une fonction de réaction des marchés financiers serait un projet de recherche à part entière, tant les difficultés sont nombreuses. Nous avons mentionné le manque de données, mais on pourrait également souligner la difficulté structurelle à vouloir estimer une relation entre une variable financière (observable avec une fréquence quasi instantanée) et des variables de finances publiques (observables, au mieux trimestriellement [20]). Peut-être que ce type de relation est *de fait* non-estimable, et voire sans fondement, si l'on pense que le spread de taux sur les obligations publiques dépend de variables anticipées, subjectives, inobservables, telles que les spéculations sur l'état futur de la politique intérieure d'un pays, la probabilité de voir accéder au pouvoir un gouvernement étiqueté comme dépensier, etc. Dans ce cas-là, quid de la pertinence du genre de modèle que nous avons présenté ?

Les dettes publiques européennes sont-elles soutenables ? En reprenant les résultats de Stefan Collignon, à partir des critères qu'il définit dans son article, nous avons fait remarquer qu'une approche rigoureuse donne des conclusions légèrement différentes de celles auxquelles il parvenait. En effet, dans les pays pour lesquels nous disposons d'une estimation de la fonction de réaction budgétaire, le paramètre $\hat{\alpha}$ n'est pas toujours significativement supérieur au seuil α_{crit} qui définit une politique budgétaire fortement soutenable : selon nous, et d'après le modèle initial

18. C'est-à-dire en répondant à la question suivante : "Les surplus primaires en moyenne dégagés vérifient-ils ou non une relation telle que les coefficients de de la fonction de réaction budgétaire sont supérieurs au seuil α_{min} ou β_{min} ?".

19. Et si de telles estimations peuvent aboutir.

20. Mais cependant, les décisions en matière budgétaires étant annuelles, on peut s'interroger sur l'intérêt d'uiliser dans ce cas-là des données trimestrielles, pour l'étude de la soutenabilité de la politique budgétaire.

de Stefan Collignon, seuls l'Allemagne et le Portugal vérifient cette condition de soutenabilité forte. Cela dit, toujours selon ces résultats, tous les pays de notre panel vérifient la condition de soutenabilité faible.

Les résultats que nous avons présentés à la section 4, bien qu'ils soient probablement peu robustes, montrent quant à eux que la prise en compte d'un effet de prime de risque lié à l'endettement public durçit significativement les conditions de soutenabilité faible et forte. Si l'on considère ces résultats, à titre indicatif, aucun des cinq pays pour lesquels nous disposons de résultats ne vérifie la condition de soutenabilité forte, et la Belgique ne vérifie pas, quant à elle, la condition de soutenabilité faible. Un travail empirique plus approfondi, à partir d'une base de données plus conséquente, devrait permettre d'apporter des conclusions plus solides – à condition toutefois, que la relation de prime de risque que l'on a postulée pour la construction de notre modèle modifié soit pertinente (cf. *supra*).

Soutenabilité de la dette, politiques budgétaire et monétaire. Une future piste de recherche consisterait finalement à endogénéiser les deux dernières variables-clés, restées exogènes jusqu'ici : le taux de croissance économique et le taux d'inflation. Peut-être que ces deux pistes seraient plus justifiées, dans la mesure où l'on peut modéliser des relations qui font sens entre dette publique et taux d'inflation (selon la *Fiscal Theory of Price Level*), mais également entre dépense publique et taux de croissance économique à court terme (effet multiplicateur). D'autre part, le taux d'intérêt réel de long terme et le taux d'inflation pourrait être endogénéisés par la prise en compte de la politique monétaire, *via* une règle de Taylor : le taux long dépendrait alors du taux court et des anticipations d'inflation. On pourrait, par exemple, introduire ce type de fonction de réaction budgétaire dans un modèle DSGE, inspiré de Corsetti et al. (2010) ou bien de Denes et al. (2012), et chercher numériquement, à défaut de pouvoir le faire analytiquement, des critères de soutenabilité sur les paramètres α ou β...

A Preuve des propositions théoriques

A.1 Preuve des propositions relatives aux sections 3 et 4

Le système présenté à la section 3 s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{d(t)} \\ \dot{s(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-y & -1 \\ \alpha(r+\pi)+\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

Preuve de l'erreur de Collignon et de la proposition 3. Le polynôme caractéristique associé à ce système dynamique s'écrit :

$$\lambda^2 + (\alpha - (r-y))\lambda + \alpha(y+\pi) + \beta = 0$$

Une première condition sur α découle directement de l'analyse de ce polynôme. Si l'on suppose que le déterminant de la matrice de transition de ce système est (quasiment toujours) positif

$$\alpha(y+\pi) + \beta > 0$$

ce qui se justifierait du fait que $\alpha > 0, \beta > 0$, par hypothèse sur la fonction de réaction budgétaire [21], et si l'on considère le taux de croissance économique nominal moyen $y+\pi > 0$ est positif, alors reste seulement la condition suivante sur la trace de la matrice de transition de ce système, c'est-à-dire :

$$(r-y) - \alpha < 0$$

ou encore :

$$\alpha > r - y$$

Ces conditions sur la trace et le déterminant sont celles de Routh-Hurwitz pour un polynôme du second degré.

On remarque alors immédiatement que cette condition, qui garantit la stabilité du système, ne dépend pas de β. C'est la preuve que la proposition de Collignon $\beta > (r-y)^2$ pour la soutenabilité d'une politique budgétaire uniquement caractérisée par une cible de dette est fausse. En fait, dans le cas $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, le seul moyen pour la politique budgétaire d'être soutenable est de vérifier :

$$\begin{cases} \beta & > & 0 \\ y & > & r \end{cases}$$

Définition de α_{min} et de α_{crit} Nous nous concentrons maintenant sur le cas $\beta = 0$ et $\alpha > 0$. Le discriminant de ce polynôme du second degré est égal à :

$$\Delta = (\alpha - (r-y))^2 - 4(\alpha(y+\pi))$$

21. Des paramètres négatifs signifieraient simplement que la condition nécessaire mais non suffisante pour la soutenabilité – *i.e.* une réponse positive du solde primaire à l'endettement public et aux déficits – n'est pas vérifiée.

Définissons le discriminant du polynôme caractéristique comme un polynôme du second degré en fonction de α, c'est-à-dire :

$$f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha(r + y + 2\pi) + (r - y)^2$$

et étudions le cas

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \leq 0$$

pour lequel ce système admet deux valeurs propres ou racines du polynôme caractéristique complexe. Pour garantir la stabilité du système, chacune des racines doit être de partie réelle négative, ce qui est garanti tant que

$$\alpha > r - y$$

aussi, dans l'étude des racines du polynôme défini ci-dessus, il faudra étudier sous quelle condition que la plus petite des deux racines du polynôme $f(\alpha)$ est inférieure au seuil $r - y$. Le discriminant de $f(\alpha)$ vaut :

$$\Delta_{f(\alpha)} = 4(r + \pi)(y + \pi) > 0$$

et on obtient deux racines réelles :

$$\begin{cases} \alpha_1 &= (\sqrt{r + \pi} - \sqrt{y + \pi})^2 \\ \alpha_2 &= (\sqrt{r + \pi} + \sqrt{y + \pi})^2 \end{cases}$$

On étudie maintenant sous quelle condition $\alpha_1 > r - y$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 > r - y &\Leftrightarrow (\sqrt{r + \pi} - \sqrt{y + \pi})^2 > r - y \\ &\Leftrightarrow y + \pi > \sqrt{(r + \pi)(y + \pi)} \\ &\Leftrightarrow y > r \end{aligned}$$

D'où vient la preuve de la proposition 1 :

$$\begin{cases} \alpha_{min} = (\sqrt{r + \pi} - \sqrt{y + \pi})^2 & \text{si} \quad r < y \\ \alpha_{min} = r - y & \text{si} \quad r > y \end{cases}$$

L'intuition économique pour ce dernier résultat est la suivante : on s'intéresse à l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ pour lequel le polynôme caractéristique admet deux racines complexes ; lorsque $r - y > 0$, la borne inférieur de cet intervalle est inférieur à $r - y$, qui est la condition minimale de soutenabilité ; au contraire, lorsque $r - y < 0$, la condition minimale de soutenabilité impliquerait un α_{min} potentiellement négatif ce qui est contraire au principe de soutenabilité défini à partir des fonctions de réactions budgétaires (Bohn, 1998, 2005, 2007), ainsi qu'à la condition sur le déterminant $\alpha(y + \pi) > 0$. Dans le cas $r - y$, le seuil $\alpha_{min} = \alpha_1$ serait quant à lui proche de 0 mais tout de même positif. Ainsi, au-delà du raisonnement mathématique, c'est aussi l'intuition économique d'une réponse positive du solde primaire public à un accroissement du déficit qui est derrière cette alternative selon l'état d'*efficience* ou d'*inefficience* dynamique.

La définition d'α_{crit} découle directement de cette solution :

$$\alpha_{crit} = \alpha_2 = (\sqrt{r + \pi} + \sqrt{y + \pi})^2$$

puisqu'en effet on obtient :

$$\alpha > \alpha_2 \Rightarrow \Delta > 0$$

c'est-à-dire que le polynôme caractéristique admet alors deux racines réelles (négatives), ce qui définit la convergence monotone et rapide vers l'état stationnaire du système.

La démonstration des propositions 4 à 6 relatives au modèle non linéaire incorporant une prime de risque linéaire est identique dès lors que l'on pose :

$$r^{**} = r^* + \gamma(2\bar{d} - d^*)$$

dans la jacobienne du système linéarisé autour de son point-fixe.

A.2 Preuve des propositions relatives à la section 5

A.2.1 Critères de stabilité pour une matrice carrée d'ordre 3

Soit A une matrice carrée d'ordre 3, à coefficients quelconques. Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \text{trace}(A)\lambda^2 - \frac{1}{2}\Big(\text{trace}(A^2) - (\text{trace}(A))^2\Big)\lambda - \det(A)$$

D'après les conditions de Routh-Hurwitz sur les coefficients de ce polynôme, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de $P(\lambda)$ (ou valeurs-propres de la matrice A) soient de partie réelle négative, et donc que le système dynamique caractérisé par la matrice A soit stable, est :

$$\begin{cases} \text{trace}(A) & < & 0 \\ \text{trace}(A^2) - (\text{trace}(A))^2 & < & 0 \\ \det(A) & < & 0 \\ \frac{1}{2}\text{trace}(A)\big(\text{trace}(A^2) - (\text{trace}(A))^2\big) & > & \det(A) \end{cases}$$

et l'on remarque que la dernière condition est déjà vérifiée si les deux premières le sont aussi, de telle façon que :

$$\text{trace}(A)\big(\text{trace}(A^2) - (\text{trace}(A))^2\big) > 0 > \det(A)$$

Ainsi, les conditions de stabilité se résument à :

$$\begin{cases} \text{trace}(A) & < & 0 \\ \text{trace}(A^2) - (\text{trace}(A))^2 & < & 0 \\ \det(A) & < & 0 \end{cases}$$

A.2.2 Preuves des propositions relatives au modèle 1

L'étude des conditions de stabilité du système linéarisé autour de son point-fixe se rapporte à la jacobienne du système linéarisé ; celle-ci s'exprime de la façon suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \bar{r} - y & -1 & \bar{d} \\ \alpha\big(\bar{r} + \pi\big) + \beta & -\alpha & \alpha\bar{d} \\ \eta & 0 & 1 - \eta \end{pmatrix}$$

Et le calcul de la trace et du déterminant permettent d'exprimer les conditions de Routh-Hurwitz présentées plus tôt.

Cible de déficit. Si $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, alors les conditions de Routh-Hurwitz deviennent, une fois simplifiées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & > & (\bar{r}-y)+(1-\eta) \\ \alpha(1-\eta)(y+\pi) & < & 0 \\ \alpha(y+\pi+\eta-1) & > & \eta\bar{d}-(1-\eta)(\bar{r}-y) \end{array}\right.$$

Soit, en considérant que $(y+\pi)$ est en moyenne strictement positif et que α, par hypothèse, doit être positif pour garantir la soutenabilité de la dette publique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \eta & > & 1 \\ \alpha & > & \max\left((\bar{r}-y)-(\eta-1); \frac{\eta\bar{d}+(\eta-1)(\bar{r}-y)}{y+\pi+\eta-1}\right) \end{array}\right.$$

Enfin, on montre que :

$$(\bar{r}-y)-(\eta-1) > \frac{\eta\bar{d}+(\eta-1)(\bar{r}-y)}{y+\pi+\eta-1} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{r}-y > \frac{\eta\bar{d}+(\eta-1)^2}{y+\pi}$$

Cible de dette. Si $\beta > 0$ et $\alpha = 0$, alors les conditions de Routh-Hurwitz donnent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \eta-1 & > & \bar{r}-y \\ \beta(1-\eta) & < & 0 \\ \beta & > & \eta\bar{d}-(1-\eta)(\bar{r}-y) \end{array}\right.$$

que l'on simplifie par les conditions suivantes, sachant là encore $\beta > 0$ par hypothèse sur la fonction de réaction budgétaire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \eta & > & \max\Big(1; 1+\bar{r}-y\Big) \\ \beta & > & \eta\bar{d}+(\eta-1)(\bar{r}-y) \end{array}\right.$$

A.2.3 Preuves des propositions relatives au modèle 2

Là encore, l'étude des conditions de stabilité du système linéarisé autour de son point-fixe se rapporte à la jacobienne du système linéarisé ; celle-ci s'exprime de la façon suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \bar{r}-y & -1 & \bar{d} \\ \alpha\big(\bar{r}+\pi\big)+\beta & -\alpha & \alpha\bar{d} \\ \eta(\bar{r}+\pi) & -\eta & 1-\eta(1-\bar{d}) \end{pmatrix}$$

Cible de déficit. Si $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, alors les conditions de Routh-Hurwitz deviennent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & > & 1+(\bar{r}-y)-\eta(1-\bar{d}) \\ \alpha(1-\eta)(y+\pi) & < & 0 \\ \alpha(y+\pi+\eta-1) & > & \eta\bar{d}(\pi+y)+(\eta-1)(\bar{r}-y) \end{array}\right.$$

Soit, en considérant que $(y+\pi)$ est en moyenne strictement positif et que α, par hypothèse, doit être positif pour garantir la soutenabilité de la dette publique :

$$\begin{cases} \eta & > & 1 \\ \alpha & > & \max\left((1+(\bar{r}-y)-\eta(1-\bar{d}); \frac{\eta\bar{d}(\pi+y)+(\eta-1)(\bar{r}-y)}{y+\pi+\eta-1}\right) \end{cases}$$

Cible de dette. Si $\beta > 0$ et $\alpha = 0$, alors les conditions de Routh-Hurwitz se simplifient telles que :

$$\begin{cases} \eta & > & \frac{1+\bar{r}-y}{1-\bar{d}} \\ \beta(1-\eta) & < & 0 \\ \beta & > & \eta\bar{d}(y+\pi)+(\eta-1)(\bar{r}-y) \end{cases}$$

que l'on simplifie par les conditions suivantes, sachant là encore que $\beta > 0$ par hypothèse sur la fonction de réaction budgétaire :

$$\begin{cases} \eta & > & \max\left(1; \frac{1+\bar{r}-y}{1-\bar{d}}\right) \\ \beta & > & \eta\bar{d}(y+\pi)+(\eta-1)(\bar{r}-y) \end{cases}$$

B Données

Les données utilisées pour l'estimation de la fonction de réaction budgétaire sont toutes issues de la base de données gérée par la Commission européenne, l'*Annual Macroeconomic Database*. Elle rassemble des séries annuelles pour les pays de la Zone euro, de l'Union Européenne ainsi que quelques pays OCDE. Nous y avons utilisé :

- les séries de surplus primaire structurel, ajusté par rapport au PIB potentiel, d'après les calculs de la Commission européenne ; par ailleurs nous intégrons, pour cette variable uniquement, les prévisions de la Comission européenne pour 2013.
- les séries de dette publique et de déficit, dites de l'EDP (*Excessive Deficit Procedure*)
- enfin, pour le calcul des différents seuils de soutenabilité présentés dans ce mémoire, nous avons utilisé les série de PIB en volume, de déflateur du PIB (pour le taux d'inflation) ainsi que le taux d'intérêt réel (déflateur du PIB) de long terme sur les obligations publiques.

Il nous est apparu que de nombreuses séries ne couvraient pas toute la période pour laquelle Collignon (2012) estime ses fonctions de réaction budgétaire : c'est le cas de l'Espagne, de la Grèce, de l'Irlande, du Royaume-Uni, de l'Italie, de la Suède.

Stefan Collignon dit avoir obtenu de la Commission européenne des séries complètes ; nous lui avons donc demandé s'il était possible qu'il nous envoie la base de données utilisée pour son article mais il ne nous a pas répondu. D'où le fait que nous n'estimions nos fonctions de réactions que sur un "panel" de pays réduit comparé au sien, refusant d'estimer ces équations sur seulement 18 ans (en effet, le panel est "complet" de 1995 à 2013, si l'on compte les prévisions pour le solde primaire structurel). Un futur travail consisterait à contruire une base de données complète et la plus longue possible, afin de mener ces estimations de façon robuste.

Enfin, quant aux données utilisées pour l'estimation de notre équation de spread de taux sur les obligations publiques, les séries de déficit, de PIB en volume et d'inflation proviennent toutes des comptes trimestriels disponible sur Eurostat ; tandis que les séries mensuelles pour les taux

d'intérêt réels dans la Zone euro (transformées en séries trimestrielles, moyenne sur 4 trimestres) proviennent du site de la BCE [22].

C Construction des tests de soutenabilité

Pour mener nos tests unilatéraux sur la valeur du paramètre α on choisit comme hypothèse nulle l'hypothèse d'une dette non soutenable et comme alternative l'hypothèse de soutenabilité ; peu importe d'ailleurs le choix d'hypothèse nulle puisque les statistiques de tests (ainsi que les *p-values*) sont symétriques. Le test de soutenabilité faible s'exprime formellement comme :

$$\text{H0} \ : \ \hat{\alpha} \leq \alpha_{min} \quad \text{contre} \quad \text{H1} \ : \ \hat{\alpha} > \alpha_{min}$$

De même que le test de soutenabilité forte s'exprime comme :

$$\text{H0} \ : \ \hat{\alpha} \leq \alpha_{crit} \quad \text{contre} \quad \text{H1} \ : \ \hat{\alpha} > \alpha_{crit}$$

C'est-à-dire, en prenant les statistiques de Student associées à ces deux tests, on obtient pour la soutenabilité faible :

$$\text{H0} \ : \ t = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_{min}}{\hat{\sigma_\alpha}} \leq 0 \quad \text{contre} \quad \text{H1} \ : \ t = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_{min}}{\hat{\sigma_\alpha}} > 0$$

et pour la soutenabilité forte :

$$\text{H0} \ : \ t = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_{crit}}{\hat{\sigma_\alpha}} \leq 0 \quad \text{contre} \quad \text{H1} \ : \ t = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_{crit}}{\hat{\sigma_\alpha}} > 0$$

Ces statistiques de test suivent une loi de Student à $n - k$ degrés de liberté (n observations pour k paramètres estimés). La p-value p avec laquelle on rejette le test se calcule alors de la façon suivante :

$$p = 1 - \mathbb{P}\left[\text{St}(n-k) < t\right]$$

22. http ://www.ecb.int/stats/money/long/html/index.en.html

Bibliographie

Afonso, A. (2005). Fiscal sustainability : The unpleasant european case. *FinanzArchiv : Public Finance Analysis*, 61(1).

Auerbach, A. J. and Gorodnichenko, Y. (2012). Measuring the output responses to fiscal policy. *American Economic Journal : Economic Policy*, 4(2) :1–27.

Baldacci, E. and Kumar, M. S. (2010). Fiscal deficits, public debt, and sovereign bond yields. *IMF Working Papers*.

Barnes, S. (2010). Resolving and avoiding unsustainable imbalances in the euro area. OECD Economics Department Working Papers 827, OECD.

Biau, O. and Girard, E. (2005). Politique budgetaire et dynamique economique en france. l'approche var structurel. *Revue economique*, 56(3) :755–764.

Blanchard, O., Chouraqui, J.-C., Hagemann, R. P., and Sartor, N. (1991). The sustainability of fiscal policy : New answers to an old question. Working Paper 1547, National Bureau of Economic Research.

Blanchard, O. and Perotti, R. (2002). An empirical characterization of the dynamic effects of changes in government spending and taxes on output. *The Quarterly Journal of Economics*, 117(4) :1329–1368.

Bohn, H. (1998). The behavior of U.S. public debt and deficits. *The Quarterly Journal of Economics*, 113(3) :949–963.

Bohn, H. (2005). The sustainability of fiscal policy in the united states. CESifo Working Paper Series 1446, CESifo Group Munich.

Bohn, H. (2007). Are stationarity and cointegration restrictions really necessary for the intertemporal budget constraint ? *Journal of Monetary Economics*, 54(7) :1837–1847.

Bénassy-Quéré, A. and Roussellet, G. (2012). Fiscal sustainability in the presence of systemic banks : the case of EU countries. Working Paper 2012-05, CEPII research center.

Collignon, S. (2012). Fiscal policy rules and the sustainability of public debt in europe. *International Economic Review*, 53(2) :539–567.

Corsetti, G., Kuester, K., Meier, A., and Muller, G. J. (2010). Debt consolidation and fiscal stabilization of deep recessions. *American Economic Review*, 100(2) :41–45.

Denes, M., Eggertsson, G. B., and Gilbukh, S. (2012). Deficits, public debt dynamics, and tax and spending multipliers. Staff Reports 551, Federal Reserve Bank of New York.

Gali, J. and Perotti, R. (2003). Fiscal policy and monetary integration in europe. *Economic Policy*, 18(37) :533–572.

Hakkio, C. S. and Rush, M. (1991). Cointegration : how short is the long run ? *Journal of International Money and Finance*, 10(4) :571–581.

Hamilton, J. D. and Flavin, M. A. (1986). On the limitations of government borrowing : A framework for Empirical Testing. *American Economic Review*, 76(4) :808–19.

Ilzetzki, E., Mendoza, E. G., and Végh, C. A. (2013). How big (small ?) are fiscal multipliers ? *Journal of Monetary Economics*, 60(2) :239–254.

INSEE (2004). La dette publique en france : la tendance des vingt dernières années est-elle soutenable ? In *L'économie française 2004-2005*, pages 59–80.

Neck, R. and Sturm, J.-E. (2008). *Sustainability of public debt*. MIT Press.

Quintos, C. E. (1995). Sustainability of the deficit process with structural shifts. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(4) :409–17.

Romer, D. (2011). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill/Irwin, 4th edition.

Trehan, B. and Walsh, C. E. (1988). Common trends, the government's budget constraint, and revenue smoothing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2-3) :425–444.